Hauptstudium

Bestellmengenpolitiken bei stochastischer, stationärer Nachfrage (II)

Dr. Waldemar Toporowski, Köln

III. (r, S)-Politik

1. Bestandsverlauf

Konstanter Bestellzyklus

Bei einer (r, S)-Politik wird in **konstanten Zeitabständen** von r eine Bestellung ausgelöst, die den disponiblen Bestand auf das **Bestellniveau** S aufstockt. Die Bestellmenge trifft nach Ablauf der Wiederbeschaffungszeit ein. Der Vorteil eines konstanten Bestellzyklus r besteht darin, daß Restriktionen bezüglich des Transportes, die aus einem Tourenplan oder einem festen Belieferungsrhythmus resultieren, leicht berücksichtigt werden können. Nachteile können sich aus schwankenden Bestellmengen ergeben. Der Bestandsverlauf bei Anwendung einer (r, S)-Politik wird in der Abb. 2 verdeutlicht.

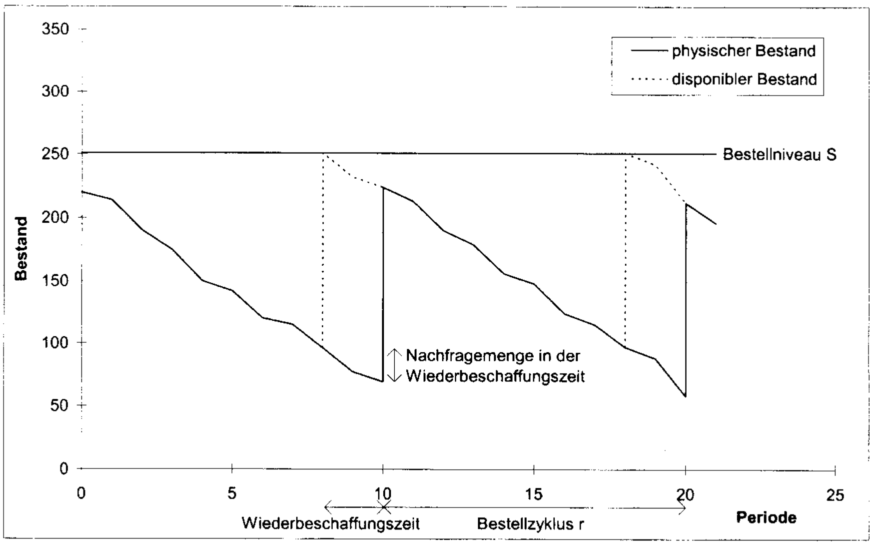

Abb. 2: Bestandsentwicklung bei Anwendung der (r, S)-Politik

Unmittelbar nach dem Eintreffen der Lieferung beträgt der Bestand:

$$E(\text{Bestand nach der Lieferung}) = S - E(Y) = S - \mu_Y$$

Bis zum Eintreffen der nächsten Lieferung, d.h. nach dem **Bestellzyklus r**, verringert sich der Bestand um den Erwartungswert der Nachfrage in diesem Zeitraum. Wird r als Anteil an dem Planungszeitraum ausgedrückt, so reduziert sich der Bestand bei einer gleichmäßigen Nachfrage um $r \cdot B$. Daraus folgt:

$$E(\text{Bestand vor der Lieferung}) = S - \mu_Y - r \cdot B$$

Für den durchschnittlichen Bestand bedeutet das:

Durchschnittlicher Bestand

$$E(\text{Bestand}) = S - \mu_Y - r \cdot B + \frac{1}{2} \cdot [S - \mu_Y - (S - \mu_Y - r \cdot B)] = S - \mu_Y - \frac{r \cdot B}{2}$$

Variiert man die Annahmen bezüglich der Fehlmengenkosten bzw. des Servicegrades, so erhält man **vier Varianten des (r, S)-Modells**.

2. (r, S)-Modell mit Fehlmengenkosten pro Fehlmengenereignis

Nach der Auslösung einer Bestellung beträgt der disponible Bestand genau S. Er muß sowohl die Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit als auch in dem anschließenden Bestellzyklus decken. Nimmt man an, daß die Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit und die Nachfrage in dem Bestellzyklus stochastisch unabhängig sind, und unterstellt weiter, daß die Länge der Wiederbeschaffungszeit ein w'-faches und die Länge des Bestellzyklus ein r'-faches einer Grundperiode darstellen, in der die Nachfrage D normalverteilt ist mit $D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, dann gilt für die Parameter der Nachfrage $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ in der **Wiederbeschaffungszeit** und dem anschließenden **Bestellzyklus:**

$$\mu_X = (w' + r') \cdot \mu_D$$

$$\sigma_X = \sqrt{w' + r'} \cdot \sigma_D$$

Zwischen der Länge der Grundperiode und der Länge des Planungszeitraums besteht ein konstantes Verhältnis $\frac{\mu_D}{B}$, so daß die Länge der Wiederbeschaffungszeit sowie des Bestellzyklus in Grundperioden wie folgt als Anteil am Planungszeitraum ausgedrückt werden kann:

$$w' = w \cdot \frac{B}{\mu_D}$$

$$r' = r \cdot \frac{B}{\mu_D}$$

Für die **Verteilungsparameter von X** erhält man somit:

(30) $$\mu_X = (w' + r') \cdot \mu_D = \left(\frac{w \cdot B}{\mu_D} + \frac{r \cdot B}{\mu_D}\right) \cdot \mu_D = (w + r) \cdot B$$

(31) $$\sigma_X = \sqrt{w' + r'} \cdot \sigma_D = \sqrt{\frac{w \cdot B}{\mu_D} + \frac{r \cdot B}{\mu_D}} \cdot \sigma_D = \sqrt{w + r} \cdot \sqrt{\frac{B}{\mu_D}} \cdot \sigma_D$$

Die Darstellung zeigt, daß beide Parameter vom Bestellzyklus r abhängen, was bei der Minimierung der Gesamtkostenfunktion zu beachten ist.

Für die **Fehlmengenkosten** gilt:

(32) $$K_F = \frac{B}{r \cdot B} \cdot P(X > S) \cdot F_1$$

Die **Wahrscheinlichkeit** $P(X > S)$ läßt sich analog zur Formel (5) berechnen, so daß die Gesamtkosten die folgende Höhe aufweisen:

Gesamtkosten

(33) $$K_G = K_L + K_B + K_F = \left(S - \mu_Y - \frac{r \cdot B}{2}\right) \cdot p \cdot L + \frac{1}{r} \cdot A + \frac{1}{r} \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{S - \mu_X}{\sigma_X}\right)\right] \cdot F_1$$

Um das **Minimum der Funktion** zu bestimmen, muß man sie nach den Parametern S und r differenzieren. Da μ_X und σ_X von r abhängig sind, ist das Auflösen der Ableitungen nach den Parametern S und r schwierig. Für die Berechnung der in Tab. 2 (auf S. 328) dargestellten Werte wurde ein numerisches Verfahren zur Lösung des aus den Ableitungen resultierenden Gleichungssystems herangezogen.

Die Form der partiellen Ableitung nach S weist Ähnlichkeiten mit Formel (10) auf. Ähnlich zur Formel (11) — hier unter der Voraussetzung, daß $\frac{F_1}{p \cdot L \cdot r \cdot \sigma_X \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \geq 1$ gilt — erhält man für das **Bestellniveau S:**

(34) $$S = \mu_X + \sigma_X \cdot \sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{F_1}{p \cdot L \cdot r \cdot \sigma_X \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}\right)}$$

Ist die Voraussetzung nicht erfüllt, ist das kleinste zulässige Bestellniveau S kostenoptimal.

Die Formel (34) ist insbesondere dann nützlich, wenn man das Minimierungsproblem näherungsweise lösen will. Eine **Näherungslösung für den optimalen Bestellzyklus r** erhält man wie folgt:

(35) $$r = \frac{Q^*}{B}$$

mit Q^* = optimale Bestellmenge nach der klassischen Bestellmengenformel

Eingesetzt in Formel (34) erhält man eine Näherungslösung für das optimale Bestellniveau S. Dabei ist zu berücksichtigen, daß μ_X und σ_X nach den Formeln (30) und (31) von r abhängig sind.

3. (r, S)-Modell mit vorgegebenem α-Lieferservice

Fordert man das Einhalten eines vorgegebenen Lieferservice, so ist die **Kostenfunktion**

Gesamtkosten

(36) $$K_G = K_L + K_B = \left(S - \mu_Y - \frac{r \cdot B}{2}\right) \cdot p \cdot L + \frac{1}{r} \cdot A$$

unter einer Nebenbedingung zu minimieren, die den Servicegrad definiert. Wird ein α-Servicegrad vorgegeben, so lautet die **Nebenbedingung**:

$$P(X > S) = 1 - \alpha$$

Umgeformt erhält man:

$$(37) \qquad S = \mu_X + u_\alpha \cdot \sigma_X$$

Mit dem Lagrange-Ansatz erhält man ein Gleichungssystem, das ebenfalls nur numerisch gelöst werden kann.

Für eine Näherungslösung kann man allerdings wieder sukzessive den Bestellzyklus r aus Gleichung (35) und das Bestellniveau S aus Gleichung (37) bestimmen.

4. (r, S)-Modell mit Fehlmengenkosten, die proportional zum Wert der Fehlmenge sind

Sind die **Fehlmengenkosten proportional** zum Wert der Fehlmenge, so gilt:

$$(38) \qquad K_F = \frac{1}{r} \cdot \sigma_X \cdot G_u\left(\frac{S - \mu_X}{\sigma_X}\right) \cdot p \cdot F_2$$

Für die Gesamtkosten folgt daraus:

Gesamtkosten

$$(39) \qquad K_G = K_L + K_B + K_F = \left(S - \mu_Y - \frac{r \cdot B}{2}\right) \cdot p \cdot L + \frac{1}{r} \cdot A + \frac{1}{r} \cdot \sigma_X \cdot G_u\left(\frac{S - \mu_X}{\sigma_X}\right) \cdot p \cdot F_2$$

Das Gleichungssystem der partiellen Ableitungen ist nur numerisch lösbar. Die Ableitung nach S liefert allerdings die folgende Gleichung

$$(40) \qquad F_u\left(\frac{S - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \frac{L \cdot r}{F_2},$$

die für $\frac{L \cdot r}{F_2} \leq 1$ lösbar ist. Ist die Bedingung nicht erfüllt, löst das kleinste zulässige Bestellniveau S das Optimierungsproblem. Für eine Näherungslösung kann man den Bestellzyklus r aus Gleichung (35) und das Bestellniveau S aus Gleichung (40) bestimmen.

5. (r, S)-Modell mit vorgegebenem β-Lieferservice

Wird ein **β-Servicegrad** vorgegeben, so ist die **Gesamtkostenfunktion**

Gesamtkosten

$$(41) \qquad K_G = K_L + K_B = \left(S - \mu_Y - \frac{r \cdot B}{2}\right) \cdot p \cdot L + \frac{1}{r} \cdot A$$

unter der **Nebenbedingung**

$$(42) \qquad \frac{\sigma_X \cdot G_u\left(\frac{S - \mu_X}{\sigma_X}\right)}{r \cdot B} = 1 - \beta$$

zu minimieren. Eine exakte Lösung ist numerisch zu bestimmen. Eine Näherungslösung für den Bestellzyklus r liefert Gleichung (35) und für das Bestellniveau S die Gleichung (42).

Frage 4: Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede bestehen zwischen dem Bestellpunkt s im (s, Q)-Modell und dem Bestellniveau S im (r, S)-Modell?

---

6. Beispiel

Veranschaulichung der unterschiedlichen Varianten der (r, S)-Politik

Um die unterschiedlichen Varianten der (r, S)-Politik zu veranschaulichen, werden die Zahlen aus dem Beispiel zur (s, Q)-Politik herangezogen. Zusätzlich wird angenommen, daß die Grundperiode 1/50 des Planungszeitraums ausmacht und die Länge der Wiederbeschaffungszeit genau eine Grundperiode beträgt, d.h.:

$\mu_D = 50$ ME
$\sigma_D = 30$ ME
$w = 1/50$

Wie bei der (s, Q)-Politik werden die **exakte Lösung** und die leichter zu ermittelnde **sukzessive Lösung** bestimmt. Die Tab. 2 veranschaulicht die **optimalen Parameter r und S** sowie die Gesamtkosten und die Servicegrade.

Modell	simultane Lösung					sukzessive Lösung				
	r	S	K_G	α	β	r	S	K_G	α	β
fixe Kosten	0,0247	167,46 (34)	1328,42 (33)	89,3%	96,3%	0,0200 (35)	161,10 (34)	1335,74 (33)	92,5%	97,5%
vorg. α-Serv.	0,0151	153,27 (37)	1173,59 (36)	95,0%	97,8%	0,0200 (35)	169,78 (37)	1197,85 (36)	95,0%	98,2%
prop. Kosten	0,0216	151,68 (40)	1197,33 (39)	86,5%	94,5%	0,0200 (35)	148,81 (40)	1198,69 (39)	87,5%	94,7%
vorg. β-Serv.	0,0213	152,85 (42)	997,95 (41)	87,6%	95,0%	0,0200 (35)	149,89 (42)	998,92 (41)	88,0%	95,0%

Tab. 2: Simultane und sukzessive Lösung im (r, S)-Modell

Ein Vergleich zwischen den Kosten der simultanen und den Kosten der sukzessiven Lösung zeigt — mit Ausnahme des Modells mit einem vorgegebenen α-Servicegrad — einen sehr geringen Anstieg der Gesamtkosten. Ein Vergleich mit den Ergebnissen in Tab. 1 macht zudem deutlich, daß die (r, S)-Modelle zu höheren Gesamtkosten führen als die (s, Q)-Modelle. Der Anstieg beträgt ca. 20 - 30%.

IV. (r, s, S)-Politik

Auswahl sinnvoller Bestellpolitiken

Durch eine Kombination der Parameter s und r einerseits und Q und S andererseits erhält man **insgesamt vier Bestellpolitiken**. In den vorhergehenden Abschnitten sind die (s, Q)- und die (r, S)-Politik dargestellt worden. Auf eine Darstellung der (s, S)- und (r, Q)-Politiken soll aus folgenden Gründen verzichtet werden:

Im Rahmen der (s, S)-Politik wird die Bestellmenge so gewählt, daß der disponible Bestand auf das Niveau S aufgestockt wird. Die Bestellmenge hängt also von dem gegenwärtigen Bestand ab und ist somit variabel. Unter den Annahmen, daß der Bestand **kontinuierlich überwacht** wird und die **Lagerabgangsmengen gleich eins** sind, beträgt zum Zeitpunkt der Bestellung der disponible Bestand exakt s. In diesem Fall ist die Bestellmenge gleich S – s und somit konstant. Die (s, Q)- und die (s, S)-Politiken weisen dann keinen Unterschied auf.

Ein Unterschied ergibt sich erst dann, wenn auf eine der beiden Annahmen verzichtet wird, so daß der Bestand zum Zeitpunkt der Disposition unter den Bestellpunkt s sinken kann.

Wird auf die Annahme einer kontinuierlichen Überwachung verzichtet und der Bestand **periodisch** überprüft, so ist es sinnvoll, nicht mehr von einer (s, S)-, sondern von einer (r, s, S)-Politik mit einer **vorgegebenen Überprüfungsperiode r** zu sprechen. In der Literatur (siehe Tempelmeier 1996, S. 29) wird häufig die (1, s, S)-Politik verkürzt als (s, S)-Politik bezeichnet. Wenn also in diesem Abschnitt die (r, s, S)-Politik vorgestellt wird, umfaßt die Analyse das üblicherweise mit dem Begriff (s, S)-Politik bezeichnete Modell.

Gefahr von Fehlmengen und Überbeständen

Im Rahmen der (r, Q)-Politik bleibt sowohl bei der Wahl des Bestellzeitpunktes als auch bei der Festlegung der Bestellmenge **der gegenwärtige Bestand unberücksichtigt**. Bei größeren Nachfrageschwankungen resultiert daraus die Gefahr von Fehlmengen und Überbeständen. Eine Anwendung dieser Politik ist nicht zu empfehlen, so daß auf ihre Analyse verzichtet werden soll. Wenn in diesem Abschnitt die (r, s, S)-Politik untersucht wird, so wird damit zum einen der Tatsache Rechnung getragen, daß in der Praxis häufig in vorgegebenen Zeitabständen (z.B. einmal pro Tag) der aktuelle Bestand ermittelt wird. Zum anderen wird berücksichtigt, daß der Zeitpunkt der Warenlieferung von einem Zeitintervall, in dem die Bestellung stattfindet, nicht aber von einem genauen Bestellzeitpunkt (z.B. vom Tag, aber nicht von der Uhrzeit der Bestellung) abhängig ist.

1. Bestandsverlauf

Bei einer **periodischen Bestandsüberwachung** liegt zum Zeitpunkt der Bestellung der disponible Bestand in der Regel unter dem Bestellpunkt s. Die Differenz zwischen dem Bestellpunkt s und dem disponiblen Bestand soll im folgenden als Defizit U bezeichnet werden. U stellt eine Zufallsvariable dar. Da zum Zeitpunkt der Bestellung der disponible Bestand auf S aufgestockt wurde, beträgt der Bestand unmittelbar nach dem Eintreffen einer Lieferung:

$$E(\text{Bestand nach der Lieferung}) = S - E(Y) = S - \mu_Y$$

mit Y = Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Zum Zeitpunkt der Bestellung liegt der Bestand bei s – U, so daß unmittelbar vor dem Eintreffen der Lieferung für den Erwartungswert des Bestands gilt:

$$E(\text{Bestand nach der Lieferung}) = s - E(U) - E(Y) = s - \mu_U - \mu_Y$$

mit μ_U = Erwartungswert des Defizits U

Den Bestandsverlauf bei Anwendung der (r, s, S)-Politik veranschaulicht die Abb. 3.

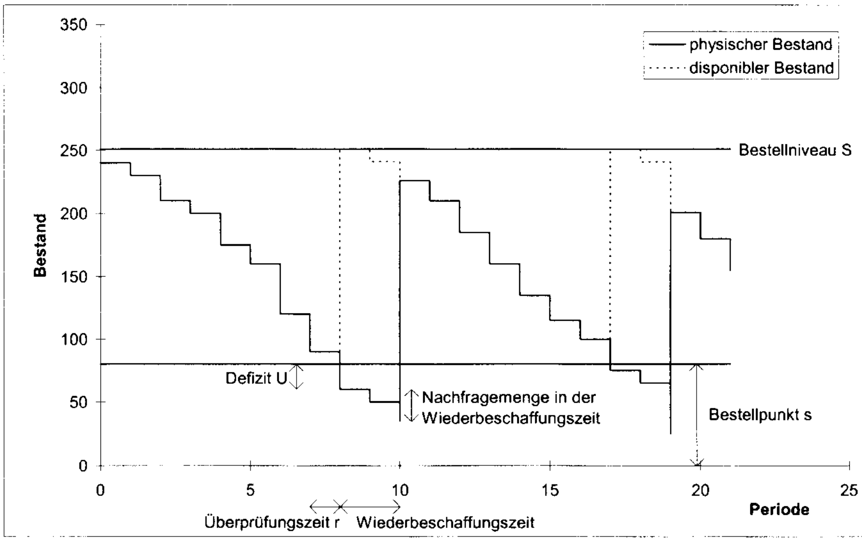

Abb. 3: Bestandsentwicklung bei Anwendung der (r, s, S)-Politik

Defizit

Das Defizit U hängt maßgeblich von der **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage** in der Überprüfungsperiode ab. Die Erneuerungstheorie (vgl. Tijms/Groenevelt 1984, S. 177 - 178) liefert im Falle einer **stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung** folgendes Ergebnis:

$$E(U) = \frac{E(D)^2 + V(D)}{2 \cdot E(D)} \tag{43}$$

mit D = Nachfrage in der Überprüfungsperiode r
E(D) = Erwartungswert der Nachfrage in der Überprüfungsperiode r
V(D) = Varianz der Nachfrage in der Überprüfungsperiode r

Der durchschnittliche Bestand im (r, s, S)-Modell weist die folgende Höhe auf:

Durchschnittlicher Bestand

$$\begin{aligned} E(\text{Bestand}) &= s - \mu_U - \mu_Y + \frac{1}{2} \cdot [S - \mu_Y - (s - \mu_U - \mu_Y)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (S + s) - \mu_Y - \frac{1}{2} \cdot \mu_U \end{aligned}$$

Für die **Lagerkosten** erhält man somit:

$$K_L = \left[\frac{1}{2} \cdot (S + s) - \mu_Y - \frac{1}{2} \cdot \mu_U\right] \cdot p \cdot L \tag{44}$$

Frage 5: Wie wirkt sich eine periodische Überprüfung auf den Bestandsverlauf aus?

2. Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert einer Fehlmenge

Um die Fehlmengenkosten zu modellieren, benötigt man die Verteilung der Funktion Y* = Y + U, d.h. der Summe aus der Nachfragemenge in der Wiederbeschaffungszeit Y und dem Defizit U. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y* kann wie folgt approximiert werden (siehe Tempelmeier 1996, S. 31; Tijms/Groenevelt 1984, S. 187 - 188):

Annäherung der Wahrscheinlichkeitsdichte von Y*

$$f(y^*) = \frac{1}{E(D)} \cdot [F_Y(y^*) - F_Z(y^*)] \tag{45}$$

mit F_Y = Verteilungsfunktion der Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit
F_Z = Verteilungsfunktion der Nachfrage in der Wiederbeschaffungs- und Überprüfungszeit

Nimmt man an, daß Y und $Z = Y + D$ **normalverteilt** sind, d.h. $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$ und

$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$, so folgt aus der Formel (45) für die **Wahrscheinlichkeit einer Fehlmengensituation**

$$(46) \qquad P(Y^* > s) = \frac{1}{\mu_D} \cdot \left[\sigma_Z \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

und für den **Erwartungswert der Fehlmenge** in einem Bestellzyklus

$$(47) \qquad E(\text{Fehlmenge}) = \int_s^\infty (y^* - s) \cdot f(y^*)dy^*$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \mu_D} \cdot \left[\sigma_Z^2 \cdot J_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y^2 \cdot J_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

mit

$$(48) \qquad J_u(k) = (1 + k^2) \cdot [1 - F_u(k)] - k \cdot f_u(k).$$

Differenziert man die Funktionen (46) und (47) nach s, so erhält man:

$$(49) \qquad \frac{dP(Y^* > s)}{ds} = \frac{1}{\mu_D} \cdot \left[F_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) - F_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

$$(50) \qquad \frac{d\int_s^\infty (y^* - s) \cdot f(y^*)dy^*}{ds} = \frac{1}{\mu_D} \cdot \left[-\sigma_Z \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) + \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Die Formeln (49) und (50) werden benötigt, um die optimalen Bestellparameter in den Abschnitten 3 und 5 zu bestimmen. Wie in den bereits vorgestellten Modellen werden im folgenden die Annahmen bezüglich der Fehlmengenkosten bzw. des Servicegrades im (r, s, S)-Modell variiert.

3. (r, s, S)-Modell mit Fehlmengenkosten pro Fehlmengenereignis

Da zum Zeitpunkt der Bestellung der Bestand bei $s - \mu_U$ liegt und der Bestand auf S aufgestockt wird, beträgt die durchschnittliche Bestellmenge $S - s + \mu_U$. Zusammen mit den Formeln (44) und (46) folgt daraus für die Gesamtkosten:

Gesamtkosten

$$(51) \qquad K_G = K_L + K_B + K_F = \left[\frac{1}{2} \cdot (S + s) - \mu_Y - \frac{1}{2} \cdot \mu_U\right] \cdot p \cdot L + \frac{B}{S - s + \mu_U} \cdot A + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B}{S - s + \mu_U} \cdot \frac{1}{\mu_D} \cdot \left[\sigma_Z \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] \cdot F_1$$

Bestimmt man die partiellen Ableitungen der Kostenfunktion nach s und S, was unter Benutzung der Gleichung (49) leicht möglich ist, so erhält man ein Gleichungssystem, das ebenfalls nur numerisch gelöst werden kann. Aus beiden Ableitungen folgt die Gleichung:

$$(52) \qquad \frac{p \cdot L \cdot \mu_D \cdot (S - s + \mu_U)}{B \cdot F_1} = F_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) - F_u\left(\frac{s - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

Sie kann dazu benutzt werden, eine Näherungslösung zu bestimmen. Die mittlere Bestellmenge in dem (r, s, S)-Modell beträgt $S - s + \mu_U$. Bestimmt man aus der klassischen Bestellmengenformel die optimale Bestellmenge Q* und setzt

$$(53) \qquad S - s + \mu_U = Q^*,$$

Optimales Bestellniveau

so hängt die Gleichung (52) nur noch von s ab. Hat man den **Bestellpunkt s**, der die Gleichung (52) löst, bestimmt, so folgt aus der Gleichung (53) für das Bestellniveau:

$$(54) \qquad S = Q^* + s - \mu_U$$

Der disponible Bestand wird zum Zeitpunkt der Bestellung auf ein Niveau aufgestockt, das der optimalen Menge nach der klassischen Bestellmengenformel und dem Bestellpunkt, vermindert um das erwartete Defizit, entspricht.

Empirische Untersuchungen zeigen, daß die Bestellmenge Q*, die die klassische Bestellmengenformel liefert, die optimale durchschnittliche Bestellmenge $S - s + \mu_U$ häufig stark unterschätzt. In diesem Fall empfiehlt es sich, die Formel (53) durch die folgende Näherung zu ersetzen:

(53a) $S - s = Q^*$

Eingesetzt in Gleichung (52) erhält man eine Gleichung, aus der der Bestellpunkt s bestimmt werden kann. Für das Bestellniveau S folgt:

(54a) $S = Q^* + s$

Gegenüber der Formel (54) ist das Bestellniveau um den Erwartungswert des Defizits höher.

4. (r, s, S)-Modell mit vorgegebenem α-Lieferservice

Fordert man das Einhalten eines vorgegebenen α-Lieferservicegrades, so ist die **Kostenfunktion**

Gesamtkosten

(55) $$K_G = K_L + K_B = \left[\frac{1}{2}\cdot(S+s) - \mu_Y - \frac{1}{2}\cdot\mu_U\right]\cdot p\cdot L + \frac{B}{S-s+\mu_U}\cdot A$$

unter einer Nebenbedingung zu minimieren, die den Servicegrad definiert. Wird ein α-**Servicegrad** vorgegeben, so lautet die **Nebenbedingung**:

(56) $$P(Y^* > s) = \frac{1}{\mu_D}\cdot\left[\sigma_Z\cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y\cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] = 1-\alpha$$

Optimale Bestellniveau

Die Lösung der Gleichung (56) liefert den optimalen **Bestellpunkt s**. Die partielle Ableitung der Kostenfunktion (55) nach S liefert das optimale Bestellniveau:

(57) $S = Q^* + s - \mu_U$

Während im Modell mit Fehlmengenkosten pro Fehlmengenereignis diese Formel eine Näherungslösung für das optimale Bestellniveau darstellt [siehe Formel (54)], handelt es sich hier um die exakte Lösung.

5. (r, s, S)-Modell mit Fehlmengenkosten, die proportional zum Wert der Fehlmenge sind

Sind die Fehlmengenkosten **proportional** zum Wert der Fehlmenge, so gilt für die **Fehlmengenkosten:**

(58) $$K_F = \frac{B}{S-s+\mu_U}\cdot\frac{1}{2\cdot\mu_D}\cdot\left[\sigma_Z^2\cdot J_u\left(\frac{s-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y^2\cdot J_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\cdot p\cdot F_2$$

Für die Gesamtkosten folgt daraus:

Gesamtkosten

(59) $$K_G = K_L + K_B + K_F = \left[\frac{1}{2}\cdot(S+s) - \mu_Y - \frac{1}{2}\cdot\mu_U\right]\cdot p\cdot L + \frac{B}{S-s+\mu_U}\cdot A + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B}{S-s+\mu_U}\cdot\frac{1}{2\cdot\mu_D}\cdot\left[\sigma_Z^2\cdot J_u\left(\frac{s-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y^2\cdot J_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\cdot p\cdot F_2$$

Bestimmt man die partiellen Ableitungen der Kostenfunktion nach s und S, so erhält man ein Gleichungssystem, das ebenfalls nur numerisch gelöst werden kann. Aus beiden Ableitungen folgt die Gleichung:

(60) $$\frac{p\cdot L\cdot\mu_D\cdot(S-s+\mu_U)}{B\cdot p\cdot F_2} = \sigma_Z\cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y\cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Sie kann dazu benutzt werden, eine Näherungslösung zu bestimmen. Die mittlere Bestellmenge im (r, s, S)-Modell beträgt $S - s + \mu_U$. Bestimmt man aus der klassischen Bestellmengenformel die optimale Bestellmenge Q^* und setzt erneut $S - s + \mu_U = Q^*$, so läßt sich aus Gleichung (60) der **Bestellpunkt s** bestimmen. Eingesetzt in Gleichung (54) erhält man das **Bestellniveau** $S = Q^* + s - \mu_U$.

Wie im Modell mit Fehlmengenkosten pro Fehlmengenereignis zeigen empirische Vergleiche. daß die Näherungsformeln (53a) bzw. (54a), d.h. $S - s = Q^*$, häufig noch bessere Ergebnisse liefern.

6. (r. s. S)-Modell mit vorgegebenem β-Lieferservice

Wird ein β-Servicegrad vorgegeben, so muß die **Gesamtkostenfunktion**

Gesamtkosten

$$(61)\qquad K_G = K_L + K_B = \left[\frac{1}{2}\cdot(S+s) - \mu_Y - \frac{1}{2}\cdot\mu_U\right]\cdot p\cdot L + \frac{B}{S-s+\mu_U}\cdot A$$

unter der **Nebenbedingung**

$$(62)\qquad \frac{1}{S-s+\mu_U}\cdot\frac{1}{2\cdot\mu_D}\cdot\left[\sigma_Z^2\cdot J_u\left(\frac{S-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \sigma_Y^2\cdot J_u\left(\frac{S-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] = 1-\beta$$

minimiert werden.

Eine Näherungslösung erhält man, wenn man mit der klassischen Bestellmengenformel die optimale Bestellmenge Q^* bestimmt, $S - s + \mu_U = Q^*$ setzt und dann aus der Gleichung (62) den optimalen **Bestellpunkt s** berechnet. Für das **Bestellniveau** folgt gemäß Gleichung (54) $S = Q^* + s - \mu_U$. Es bleibt anzumerken, daß die Formel (54a) auch in dieser Modellvariante häufig die besseren Ergebnisse liefert.

Frage 6: Welche Rolle spielt die klassische Bestellmengenformel bei der Bestimmung einer Näherungslösung im (r, s, S)-Modell?

7. Beispiel

Veranschaulichung der unterschiedlichen Varianten der (r, s, S)-Politik

Die unterschiedlichen Varianten der (r, s, S)-Politik veranschaulicht die Tab. 3. Die gleichen Zahlen wie in den vorausgegangenen Beispielen und eine Überprüfungszeit der Länge r = 1/50 liefern die folgenden Ergebnisse.

Modell	simultane Lösung					sukzessive Lösung				
	s	S	K_G	α	β	s	S	K_G	α	β
fixe Kosten	107,68	162,90	1128,97 (51)	92,4%	98,4%	109,34 (52) (2)	159,34 (54a)	1130,43 (51)	93,1%	98,5%
vorg. α-Serv.	114,37 (56)	150,37 (57)	1003,74 (55)	95,0%	98,7%	114,37 (56)	150,37 (57)	1003,74 (55)	95,0%	98,7%
prop. Kosten	92,51	147,92	979,20 (59)	82,6%	95,8%	94,18 (60) (2)	144,18 (54a)	980,79 (59)	84,0%	95,9%
vorg. β-Serv.	89,21	145,53	781,48 (61)	79,8%	95,0%	90,83 (62) (2)	140,83 (54a)	783,64 (61)	81,2%	95,0%

Tab. 3: Simultane und sukzessive Lösung im (r, s, S)-Modell

Vergleicht man die Ergebnisse der **simultanen** und der **sukzessiven Lösung**, so stellt man nur einen sehr geringen Kostenanstieg fest. Gegenüber den Varianten des (s, Q)-Modells (siehe Tab. 1) steigen die Kosten um ca. 1% an.

Die unterschiedlichen Modelle und ihre Varianten zeigen, wie groß die **Vielfalt der Bestellmengenpolitiken** allein bei stochastischer, stationärer Nachfrage ist. Abhängig davon, ob Fehlmengenkosten oder ein Lieferservicegrad modelliert werden, ändern sich die optimalen Parameter. Sie ändern sich ebenso in Abhängigkeit davon, wie die Fehlmengenkosten bzw. der Lieferservicegrad definiert werden. Die Darstellung zeigt, daß die exakte Bestimmung der optimalen Parameter bereits im Rahmen der relativ einfachen Modelle aufwendig ist. Die Definition geeigneter Hilfsfunktionen macht aber eine teils analytische, teils numerische Lösung der Optimierungsprobleme möglich. Ein Vergleich zwischen den simultan und den sukzessive bestimmten Lösungen zeigt, daß die Näherungslösungen insgesamt zufriedenstellende Ergebnisse liefern.

Literaturempfehlungen:

Günther, H.-O./Tempelmeier, H.: Produktion und Logistik. 3. Aufl., Berlin u.a. 1997.

Lee, H.L./Nahmias, S.: Single Product, Single-Location Models. In: Graves, S.C./Rinnooy Kann, A.H.G./ Zipkin, P.H. (eds.): Logistics of Production and Inventory. Amsterdam et al. 1993, S. 3 - 55.

Robrade, A.D.: Dynamische Einprodukt-Lagerhaltungsmodelle bei periodischer Bestandsüberwachung. Heidelberg 1990.

Schneeweiß, C.: Modellierung industrieller Lagerhaltungssysteme: Einführung und Fallstudien. Berlin/ Heidelberg/New York 1981.

Schneider, H.: Effect of service-levels on order-points or order-levels in inventory models. In: International Journal of Production Research, Vol. 19 (1981), No. 6, S. 615 - 631.

Silver, E.A./Peterson, R./Pyke, D.F.: Inventory Management and Production Planning and Scheduling. 3rd ed., New York et al. 1998.

Tempelmeier, H.: Quantitative Marketing-Logistik: Entscheidungsprobleme, Lösungsverfahren, EDV-Programme. Berlin u.a. 1983.

Tempelmeier, H.: Stochastische Lagerpolitiken. Ergänzendes Material zur Vorlesung Material-Logistik, Universität zu Köln, Seminar für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Industriebetriebslehre und Produktionswirtschaft. Köln 1996.

Tijms, H.C./Groenevelt, H.: Simple approximations for the reorder point in periodic and continuous review (s, S) inventory systems with service level constraints. In: European Journal of Operational Research, Vol. 17 (1984), S. 175 - 190.

Toporowski, W.: Grundlagen der Bestellpunkt- und Bestellzyklusverfahren. In: WISU, 27. Jg. (1998), S. 1142 - 1154.

Die Beantwortung der Fragen erfolgt im WISU-Repetitorium.

Die Fallstudie aus der Betriebswirtschaftslehre

Konzernkapitalflußrechnung

Dr. Frank Beine, Göttingen

I. Fallbeschreibung

Die Göttinger Allzweck AG möchte ihren Konzernabschluß um eine Kapitalflußrechnung im Sinne der IDW-Stellungnahme HFA 1/1995 ergänzen, um den international üblichen Publizitätsanforderungen zu genügen.

Die Bilanz, die Gewinn- und Verlustrechnung sowie der Anlagenspiegel sind den Tabellen 1 bis 3 zu entnehmen.

Außerdem stehen noch folgende Informationen zur Verfügung:

- **Erwerb der T-AG:** Am 31.12.1996 wurden Anteile an der T-AG in Höhe von 75% für 400 DM erworben. Die Vermögensgegenstände und Schulden der T-AG enthalten keine stillen Reserven oder Lasten (vgl. Tab. 4).
- **Einbeziehung des ausländischen Tochterunternehmens A-Inc.:** In den Konzernabschluß wird das in US-Dollar bilanzierende Unternehmen A-Inc. mit der in Tab. 5 dargestellten Bilanz einbezogen. Die Umrechnung des Jahresabschlusses der A-Inc. erfolgt zu Stichtagskursen. Die Bestandsänderungen, die als Zahlungsströme in der Konzernkapitalflußrechnung ausgewiesen werden sollen, werden mit einem Jahres-Periodendurchschnittskurs umgerechnet (vgl. Tab. 6).

Zusätzlich liegen Daten zur Entwicklung des Konzern-Anlagevermögens vor:

- Sämtliche Abgänge des Sach- und Finanzanlagevermögens beruhen auf Barverkäufen. Dabei wurde beim Verkauf der Sachanlagen ein Gewinn von 50 TDM erzielt.
- Die Investitionen in das Sachanlagevermögen in Höhe von 8.700 TDM sind mit 200 TDM zum Geschäftsjahresende noch nicht bezahlt.
- Die Investitionen in das Sachanlagevermögen in Höhe von 8.700 TDM sind mit 200 TDM zum Geschäftsjahresende noch nicht bezahlt.
- Die in den Beteiligungserträgen enthaltenen nicht ausgeschütteten Gewinne der „at equity“ bilanzierten Unternehmen in Höhe von 65 TDM werden als Zugänge des Finanzanlagevermögens ausgewiesen.

Für 1996 sind folgende Eigenkapitalbewegungen festzustellen:

- In der Periode fand eine Kapitalerhöhung von 500 TDM (davon 200 TDM Agio) statt. Die zugeführten Finanzmittel wurden in voller Höhe zur Tilgung von Anleihen verwandt.
- Der Konzern-Jahresüberschuß von 1995 wurde in Höhe von 25 TDM an andere Gesellschafter und in Höhe von 125 TDM an Konzerngesellschafter ausgeschüttet. In die Gewinnrücklagen wurden 100 TDM eingestellt.

Vermögen TDM	1996	1995	Differenz
Immaterielle Vermögensgegenstände	700	600	100
Sachanlagen	17.000	16.500	500
Finanzanlagen	3.600	3.500	100
Anlagevermögen	21.300	20.600	700
Vorräte	8.000	6.500	1.500
Forderungen aus Lieferungen u. Leistungen	2.100	1.800	300
Andere Forderungen und sonstige VG	250	200	50
Wertpapiere	180	190	-10
Flüssige Mittel	3.500	3.900	-400
Umlaufvermögen	14.030	12.590	1.440
Rechnungsabgrenzungsposten	170	130	40
Aktiva	35.500	33.320	2.180

Eigen- und Fremdkapital TDM	1996	1995	Differenz
Gezeichnetes Kapital	6.000	5.700	300
Kapitalrücklagen	1.200	1.000	200
Gewinnrücklagen	3.000	2.900	100
Jahresüberschuß	100	250	-150
Unterschied aus Währungsumrechnung	-80		-80
Anteile anderer Gesellschafter	1.000	900	100
Eigenkapital	11.220	10.750	470
Rückstellungen für Pensionen und ähnliche Verpflichtungen	5.000	4.600	400
Andere Rückstellungen	2.400	2.300	100
Rückstellungen	7.400	6.900	500
Anleihen	8.500	9.500	-1.000
Verbindlichkeiten ggü. Kreditinstituten	3.100	1.900	1.200
Verbindlichkeiten aus Lieferungen und Leistungen	2.500	2.000	500
Sonstige Verbindlichkeiten	2.500	2.000	500
Verbindlichkeiten	16.600	15.400	1.200
Rechnungsabgrenzungsposten	280	270	10
Passiva	35.500	33.320	2.180

Tab. 1: Bilanz