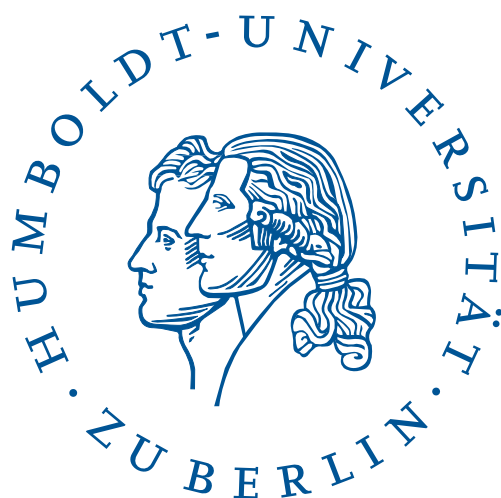


Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik



WETTERDERIVATE:

EIN ÜBERBLICK ÜBER MODELLE, BEWERTUNG UND ABSICHERUNG

– DIPLOMARBEIT –

Eingereicht von: Matthias Ritter,
geboren am 23.06.1982 in Tübingen

Betreuer: Prof. Dr. Peter Imkeller

Zweitgutachter: Prof. Dr. Ulrich Horst

Datum: Berlin, den 24. Februar 2009

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Imkeller für seine Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken, die durch viele interessante und hilfreiche Anregungen geprägt wurde, sowie für die Möglichkeit, eine Arbeit mit starkem Anwendungsbezug in der Umweltökonomie schreiben zu können. Ebenfalls danke ich Herrn Dr. Pavlyukevich für sein Engagement und seine Unterstützung bei der Strukturierung der Arbeit.

Großer Dank gebührt außerdem meinen Eltern und meiner Freundin Kerstin, die mir während des gesamten Studiums eine große Stütze waren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Theoretische Grundlagen	5
1.1 Einführung in Wetterderivate	5
1.1.1 Historischer Überblick	6
1.1.2 Marktsituation	7
1.1.3 Interessenten an Wetterderivaten	8
1.1.4 Wetterindizes	9
1.1.5 Arten von Derivaten	18
1.2 Stochastische Grundlagen	20
1.2.1 Zeitdiskrete Prozesse	20
1.2.2 Zeitstetige Prozesse	22
1.3 Finanzmathematische Grundlagen	32
1.3.1 Diskrete Zeit	32
1.3.2 Stetige Zeit	34
1.3.3 Unvollständige Finanzmärkte	37
2 Modelle für Wetterprozesse	41
2.1 Temperaturdaten Berlin-Tempelhof	41
2.2 Zeitdiskrete Modelle	44
2.2.1 Die Temperatur als Markov-Kette	45
2.2.2 Die Temperatur als $AR(p)$ -Prozess	45
2.2.3 Die Temperatur als ARMA-Modell	47
2.2.4 Die Temperatur als AR-GARCH-Prozess	49
2.2.5 Die Windgeschwindigkeit als AR-GARCH-Prozess	51
2.2.6 Die Temperatur als Fourier-Transformierte-Modell	53
2.3 Zeitstetige Modelle	57
2.3.1 Die Temperatur als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	57
2.3.2 Die Temperatur als fraktionaler Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	60
2.3.3 Die Temperatur als Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	63
2.3.4 Die Temperatur als $CAR(p)$ -Prozess	66
2.3.5 Die Windgeschwindigkeit als $CAR(p)$ -Prozess	67
2.3.6 Der Niederschlag als Markov-Prozess	69
3 Bewertung und Absicherung	73
3.1 Bewertung und Absicherung auf Basis eines Wettermodells	74
3.1.1 Ornstein-Uhlenbeck-Modell	75
3.1.2 Fraktionales Ornstein-Uhlenbeck-Modell	82
3.1.3 Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modell	84
3.1.4 $CAR(p)$ -Modell	86
3.1.5 Vergleich der CAT-Future-Preise und -Dynamiken	94
3.2 Nutzenorientierte Bewertung und Absicherung	95
3.2.1 Schattenpreise	95

Inhaltsverzeichnis

3.2.2	Indifferenzpreis und Grenznutzen	99
3.2.3	Indifferenzpreis von Niederschlagsderivaten	105
3.2.4	Gleichgewichtsmodell	110
3.3	Absicherung mit ortsfremden Wetterderivaten	115
3.3.1	Kriterien für die Wahl des Ortes	115
3.3.2	Modell für raumzeitliche Temperaturdynamik	118
3.3.3	Bewertung von „synthetischen“ Temperaturderivaten	120
	Zusammenfassung und Ausblick	125
	Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	127
	Abbildungsverzeichnis	129
	Literaturverzeichnis	133
	Thesen	137
	Selbstständigkeitserklärung	139

Einleitung

Alle reden vom Wetter, aber keiner unternimmt was dagegen.
Karl Valentin (1882-1948)

Alle reden vom Wetter. Ob am Ende der Nachrichten oder im Alltagsgespräch, das Wetter ist stets ein beliebtes Thema. Insbesondere hört man oft Klagen über das „schlechte Wetter“, wobei die Ansichten über „gutes“ und „schlechtes“ Wetter doch weit auseinandergehen: Freibäder, Getränke- und Eishersteller freuen sich über einen besonders heißen und trockenen Sommer, da sich mit jedem Grad über der Durchschnittstemperatur beispielsweise der Bierkonsum um ca. 2% erhöht. Die Landwirtschaft hingegen erleidet währenddessen Umsatzeinbußen, da sich die Ernte verringert oder künstlich bewässert werden muss, was zu höheren Kosten führt. Bauunternehmen sind an milden Wintern interessiert, da Frost ihren Umsatz schmälert, Skigebiete wiederum erhoffen sich kalte und schneereiche Winterperioden. Energieunternehmen können bei kalten Wintern mehr Energie verkaufen und damit höhere Gewinne erzielen.



©Deutsches Plakat Museum

Auch wenn die Deutsche Bundesbahn in den 60er Jahren mit dem Werbeslogan „Alle reden vom Wetter. Wir nicht. Fahr lieber mit der Bundesbahn“ ihre vermeintliche Unabhängigkeit vom Wetter betonen wollte, ist heutzutage eine wichtige ökonomische Rolle des Wetters unumstritten. „Das Wetter ist nicht nur ein Umweltthema; es ist ein bedeutender Wirtschaftsfaktor. Mindestens eine Billion Dollar unserer Wirtschaft ist wetteranfällig“, sagte 1998 der damalige US-Handelsminister William M. Daley vor dem amerikanischen Kongress [CME05]. Neuere Schätzungen gehen davon aus, dass fast 20% der US-Wirtschaft direkt vom Wetter abhängig sind [CME05]. Und für etwa 80% der weltweiten Wirtschaftstätigkeit spielen Wetterunregelmäßigkeiten direkt oder indirekt eine Rolle [Aue03]. Umso erstaunlicher ist es, dass Firmen erst 1996 damit begannen, sich mit Wetterderivaten gegen Wetterrisiken abzusichern. Bei einem Wetterderivat zahlt ein Unternehmer dem

Derivate-Anbieter eine Prämie und erhält dafür eine Auszahlung, wenn eine bestimmte, vorher festgelegte Wetterlage eintritt. Ein recht bekanntes Beispiel ist die „Schönwettergarantie“, die einige Reisebüros anbieten. Tritt im Urlaub unerwartet viel Niederschlag auf, bekommt man einen Teil des Reisepreises erstattet. Im Gegensatz zu klassischen Versicherungen muss man bei Wetterderivaten keine Forderungen stellen oder Schäden nachweisen. Außerdem ermöglichen Wetterderivate, sich gegen vergleichsweise gutes Wetter in anderen Regionen, das zu Umsatzeinbußen führen kann, abzusichern. Dabei stellen Wetterderivate aber keinen Ersatz, sondern eine sinnvolle Ergänzung zu konventionellem Versicherungsschutz dar.

Der Deutsche Bundesrat hat in der Stellungnahme zum Grünbuch zur Anpassung an den Klimawandel der Europäischen Kommission Wetterderivate auch zur Absicherung gegen die Folgen des Klimawandels vorgeschlagen: „Der Klimawandel und seine Auswirkungen in Form von Eigentumsschäden, Betriebsausfall und Waldbränden stellen Privatpersonen, Unternehmen und den Finanzsektor vor erhebliche finanzielle Risiken. Finanzdienstleistungen und Versicherungsmärkte werden innovative Lösungsmöglichkeiten finden müssen, um der zunehmenden Exposition gegenüber klimabedingten Risiken wirksam zu begegnen. Schon jetzt werden neue Finanzprodukte wie

Wetterderivate und Katastrophenanleihen auf den Markt gebracht, die weiter entwickelt werden müssen.“¹

Es gibt einige Besonderheiten, die die Entwicklung des Markts für Wetterderivate behindern. Zum einen muss ein Unternehmen genau wissen, welches Wetterereignis den Umsatz in welchem Maße beeinträchtigt, um Wetterderivate sinnvoll einsetzen zu können. Die Ermittlung der Wetterabhängigkeit ist jedoch in der Regel recht aufwändig. Außerdem erschwert die große Individualität die Bestimmung der Prämie. Jedes Derivat muss genau auf den Interessenten zugeschnitten sein, so dass auch jede Prämie individuell berechnet werden muss. Da der zugrundeliegende Wetterindex nicht handelbar ist, also ein unvollständiger Finanzmarkt vorliegt, ist die Black-Scholes-Formel nicht anwendbar. In der Literatur wurden bereits einige alternative Bewertungsmodelle ermittelt, allerdings hat sich bislang keine Bewertungsformel durchgesetzt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über den aktuellen Stand der Literatur zum Thema Wetterderivate zu geben. Zunächst werden dafür im ersten Kapitel die theoretischen Grundlagen erläutert, die dann in den folgenden Kapiteln verwendet werden. Nach einer ausführlichen Einführung in Wetterderivate werden die benötigten Grundlagen der Stochastik und Finanzmathematik behandelt. Anschließend werden im zweiten Kapitel die wichtigsten Modelle vorgestellt, wie man Wetterprozesse – überwiegend die Temperatur, aber auch Wind und Niederschlag – modellieren kann. Anhand dieser Modelle kann man das erwartete Wetterergebnis bestimmen. Im dritten Kapitel kommen wir dann zu den Bewertungs- und Absicherungsmodellen. Dabei werden wir zunächst die Bewertung und Absicherung auf Basis der Wettermodelle aus Kapitel 2 durchführen, im Anschluss nutzenorientierte Bewertung und Absicherung. Außerdem werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, dass Wetterderivate für den Ort, an dem man sich absichern möchte, nicht verfügbar sind.

¹Stellungnahme des Deutschen Bundesrates vom 09.11.07 zum „Grünbuch der Europäischen Gemeinschaften...: Anpassung an den Klimawandel in Europa – Optionen für Maßnahmen der Europäischen Union“, BR-Drucksache 469/07

1 Theoretische Grundlagen

Zunächst geben wir in Abschnitt 1.1 eine allgemeine Einführung in Wetterderivate. Diese umfasst einen historischen Überblick, eine Beschreibung der Marktsituation und der Interessenten von Wetterderivaten sowie die Definition der am häufigsten verwendeten Wetterindizes und Arten von Derivaten. Danach werden in Abschnitt 1.2 einige stochastische Prozesse vorgestellt, die in den folgenden Kapiteln verwendet werden. Das erste Kapitel endet mit den finanzmathematischen Grundlagen (Abschnitt 1.3).

Wir werden einige Grundbegriffe der Stochastik, der stochastischen Analysis und der Finanzmathematik voraussetzen. Für eine ausführlichere Beschreibung der Theorie sei auf die Bücher von Shiryaev [Shi99], Deck [Dec06] und Klenke [Kle06] verwiesen, die ebenso wie Benth [Ben04] die Grundlage für die Abschnitte 1.2 und 1.3 darstellen.

1.1 Einführung in Wetterderivate

Ein **Derivat** ist ein Finanzgut, dessen zukünftiger Wert von einem Basiswert (*underlying*) abgeleitet wird (lat.: derivare=ableiten). Aktienderivate hängen vom Kurs einer Aktie ab, Energiederivate von einem Energieindex (z. B. dem „Central European Power Index“ oder dem „Swiss Electricity Price Index“), wohingegen Wetterderivate auf verschiedenen Wetterindizes basieren. Folgende Komponenten bestimmen ein Wetterderivat:

- Die **Art** des Derivats, z. B. eine Option. Die verschiedenen Arten von Derivaten werden in Abschnitt 1.1.5 genauer beschrieben.
- Der zugrundeliegende **Wetterindex**: Wetterderivate können auf der Temperatur basieren, aber auch z. B. auf der Zahl von Millimetern Regenfall, der Anzahl von Frosttagen oder der Zahl der Sonnenstunden. Genaue Definitionen verschiedener Wetterindizes werden in Abschnitt 1.1.4 angegeben.
- Die **Wetterstation**, an der der Wetterindex gemessen wird. Wichtig ist dabei, dass die verfügbaren meteorologischen Daten von einer unabhängigen Wetterstation veröffentlicht werden, die weder vom Käufer noch vom Verkäufer beeinflusst werden kann.
- Die **Laufzeit**, während der der Wetterindex gemessen wird.
- Der **Ausübungspreis** (*strike*) als Untergrenze, ab der es zu Auszahlungen kommt.
- Die **Obergrenze** (*cap*), die die Auszahlung nach oben begrenzt.
- Der **Auszahlungsbetrag pro Indexpunkt** (*tick size*), der den zugrundeliegenden Wetterindex in einen finanziellen Wert umrechnet. An der Chicagoer Börse „Chicago Mercantile Exchange“ liegt dieser Wert meist bei 20 US-Dollar bzw. 20 britischen Pfund.
- Die **Prämie**, die man für den Erwerb des Wetterderivats zu bezahlen hat.

Zur Verdeutlichung der Begriffe betrachten wir ein reales Derivat auf Regentage. Während des Oktoberfestes vom 21.09.02 bis zum 06.10.02 (16 Tage) sicherte sich ein Wiesnwirt mit einer Call-Option gegen Niederschlag ab: Für jeden Regentag über dem Strike von 4 Regentagen erfolgte

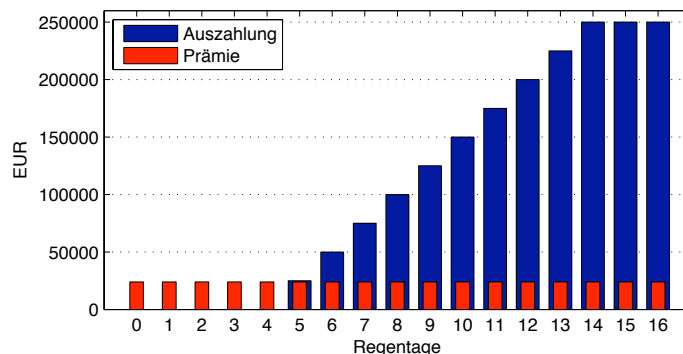


Abbildung 1.1: Beispiel eines Niederschlagsderivats auf Regentage (Laufzeit 16 Tage, Auszahlung pro Regentag 25.000 €, Strike 4 Regentage, Obergrenze 250.000 € (10 Regentage über dem Strike), Prämie 24.000 €)

eine Auszahlung in Höhe von 25.000 €, wobei ein Regentag als ein Tag mit mehr als 5 mm Niederschlag an der Wetterstation München-Stadt definiert war. Die Zahlungsobergrenze war 250.000 € (14 Regentage). Dafür zahlte er dem Versicherer eine Prämie von 24.000 €. Abbildung 1.1 zeigt die Höhe der Auszahlung in Abhängigkeit der Anzahl von Regentagen. Es kam im angegebenen Zeitraum zu 8 Regentagen, so dass 100.000 € ausgezahlt wurden.

Im Gegensatz zu Versicherungen muss man bei einem Wetterderivat keine Schäden durch das Wetter nachweisen. Nach Eintreten des abgesicherten Wetters erfolgt die Auszahlung, unabhängig davon, ob tatsächlich Umsatzeinbußen vorliegen. Außerdem sind Wetterderivate Absicherungen gegen *wahrscheinliche* Wetterrisiken wie ein wärmerer Winter oder mehr Regen im Sommer als durchschnittlich. Versicherungen hingegen sichern *unwahrscheinliche* Wetterphänomene wie Naturkatastrophen ab, die zu hohen Schäden führen.

In Abschnitt 1.1.1 folgt ein kurzer Überblick über die Geschichte der Wetterderivate, anschließend eine Beschreibung der Marktsituation (Abschnitt 1.1.2) und der Interessenten von Wetterderivaten (Abschnitt 1.1.3). In Abschnitt 1.1.4 werden verschiedene Wetterindizes dargestellt, die die Basiswerte von Wetterderivaten bilden. In Abschnitt 1.1.5 werden dann allgemein einige Arten von Derivaten beschrieben.

1.1.1 Historischer Überblick

Das erste Wetterderivat weltweit wurde im Juli 1996 zwischen den Energieversorgern Consolidated Edison Company, New York, USA, und Aquila Energy, Kansas City, USA, geschlossen. Ein kühlerer Sommer und der verminderte Einsatz von Klimaanlage führten zu sinkenden Strompreisen, allerdings blieb der Gaspreis konstant. Die Unternehmen kombinierten eine Gas-Strom-Transaktion mit einem Wetterderivat: Aquila Energy lieferte Strom zum Festpreis und erhielt von Consolidated Edison Company Gas zum Marktpreis, gleichzeitig gewährte Aquila Energy einen Rabatt in Abhängigkeit vom Cooling-Degree-Day-Index (positive Differenz zwischen täglicher Durchschnittstemperatur und einem Referenzwert von 18 °C, siehe Abschnitt 1.1.4) für New York City [Spi00].

Einen Wachstumsschub erlebte die Branche, nachdem El Niño 1997/98 für höhere Temperaturen im Winter sorgte und viele Unternehmen sich erstmals ihrer Wetterabhängigkeit bewusst wurden. 1999 nahm die Chicagoer Börse, die Chicago Mercantile Exchange (CME), Wetterderivate für zehn US-Städte¹ in ihren Handel auf. Mittlerweile bietet sie Wetterderivate für 45 Städte welt-

¹Atlanta, Chicago, Cincinnati, Dallas, Des Moines, Las Vegas, New York, Philadelphia, Portland, Tucson

weit an, 24 US-amerikanische², sechs kanadische³, zehn europäische⁴, zwei japanische⁵ und drei australische⁶ Städte.

Das erste deutsche Wetterderivat wurde 2000 zwischen der französischen Bank Société Générale und den Wirten des Oktoberfestes abgeschlossen, die sich mit einem Niederschlagsderivat gegen Einnahmeausfälle durch niedrigere Besucherzahlen bei Regen absicherten. Allerdings kam es nicht zu einer Auszahlung.

Als erster Energieversorger in Deutschland schloss im Jahr 2000 die Berliner Bewag ein Wetterderivat ab, um sich gegen einen warmen Winter 2000/2001 abzusichern. Sie erzeugte Strom größtenteils über Kraft-Wärme-Kopplung. Ein warmer Winter hätte somit zu niedrigerem Fernwärme-Bedarf der Kunden geführt. Im versicherten Zeitraum von Dezember 2000 bis März 2001 lag die Durchschnittstemperatur dann allerdings mit 2,2 °C relativ niedrig, so dass keine Auszahlung stattfand [Ess01].

Das erste Wetterderivat mit Auszahlung in Deutschland erwarb das Elektrizitätswerk Dahlenburg (Niedersachsen). Dieses kaufte eine Niederschlagsoption vom 1. Mai bis 31. August 2001 mit Strike 70 mm, um sich gegen Einnahmeausfälle abzusichern, wenn die örtlichen Bauern bei einem verregneten Sommer deutlich weniger Strom für ihre Bewässerungsanlagen nachfragen. Tatsächlich regnete es im angegebenen Zeitraum 75 mm, weshalb es für die Differenz von 5 mm zum ersten Mal in Deutschland zu einer Auszahlung eines Wetterderivats kam [EWD08].

In Japan führte die Fußball-Weltmeisterschaft 2002 in Japan/Südkorea zu verstärkter Nachfrage von Wetterderivaten. Hotels und Restaurants sicherten sich mit Niederschlagsderivaten gegen wetterbedingte Einnahmeausfälle ab. Daiwa Bank Holdings (Japan) bot für drei der 22 Städte, in denen sich die Fußballmannschaften einquartierten, Wetterderivate an, ein „England-Paket“, ein „Tunesien-Paket“ und ein „Japan-Paket“⁷.

Im Sommer 2008 kündigte die Weltbank an, Wetterderivate zur Absicherung von Katastrophenrisiken in Entwicklungsländern einzusetzen. Als erstes Projekt wurde der Abschluss eines Wetterderivats zwischen der Schweizer Rückversicherung „Swiss Re“ und dem südafrikanischen Land Malawi vermittelt, um schnelle finanzielle Hilfe nach Ernteeinbrüchen durch Dürreperioden zu ermöglichen. Nach einer Trockenperiode 2005 wurde Malawi von einer schweren Hungersnot heimgesucht. Mit dem abgeschlossenen Wetterderivat erhält die malawische Regierung in Abhängigkeit der Anzahl der Regentage eine Zahlung von bis zu 5 Mio. \$, was einem Ernterückgang von 10 % im Vergleich zum historischen Mittelwert entspricht. Im Gegensatz zu einer Erntever-sicherung würde Malawi dann schon innerhalb eines Tages finanzielle Hilfe bekommen⁸.

1.1.2 Marktsituation

Seit dem Auftreten von Wetterderivaten wurde stets damit gerechnet, dass sich ein rapide wachsender Markt entwickeln würde. Diese Erwartungen wurden jedoch nicht ganz erfüllt, der Markt wuchs zwar, aber nicht in erwartetem Maße (siehe Abbildung 1.2).

Im Berichtsjahr⁹ 1998/99 kam es weltweit zu 695 Abschlüssen von Wetterderivaten OTC (Over The Counter, „über den Ladentisch“, d. h. außerbörslich). Die Zahl hat sich in den folgenden Jah-

²zusätzlich Baltimore, Boston, Colorado Spring, Detroit, Houston, Jacksonville, Kansas City, Little Rock, Los Angeles, Minneapolis-St. Paul, Raleigh, Sacramento, Salt Lake City, Washington, D.C.

³Calgary, Edmonton, Montreal, Toronto, Vancouver, Winnipeg

⁴Amsterdam, Barcelona, Berlin, Essen, London, Madrid, Oslo, Paris, Rom, Stockholm

⁵Tokio, Osaka

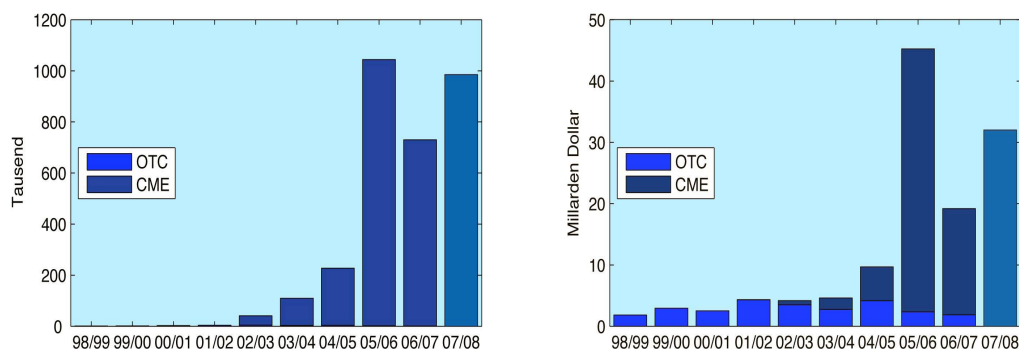
⁶Melbourne, Sydney und Brisbane

⁷*Japan schützt sich vor schlechtem Fußball-Wetter* („Financial Times Deutschland“ vom 25.04.2002)

⁸*Malawi Eyes Markets to Help Manage Drought Risk* (Pressemitteilung der Weltbank vom 16.06.2008),

Swiss Re enters into a weather derivative contract with the World Bank covering drought in Malawi (Pressemitteilung von Swiss Re vom 20.10.2008)

⁹Hier wird die Periode von April bis März des Folgejahres als Berichtsjahr bezeichnet, also eine Winter- und eine Sommersaison.



Anmerkung: Die Zahl der OTC-Vertragsabschlüsse stieg von 695 (1998/99) auf 4517 (02/03) und fiel dann wieder auf 774 (06/07). Diese Zahlen sind im Vergleich zur Zahl der CME-Abschlüsse (bis zu über einer Million) zu gering, um im Diagramm erkennbar zu sein. Die Zahlen für 2007/08 sind nicht nach OTC und CME unterschieden.

Abbildung 1.2: Zahl der Vertragsabschlüsse (links) und Nominalvolumina der Verträge (rechts) 1998-2008, Daten: [WRMA06, WRMA08b, III08]

ren jeweils ungefähr verdoppelt, wobei man bei weltweit knapp 4000 Abschlüssen 2001/02 und einem nur schwach ansteigenden Nominalvolumen noch nicht von einem Boom sprechen kann. Gefördert wurde das Wachstum durch die steigende Zahl von Abschlüssen an der CME, die 2004 die Tick-Größe (Auszahlung pro Wetterindex) von 100 \$ auf 20 \$ senkte, so dass flexiblerer Handel möglich wurde. Seit 2002/03 findet ein Großteil der Abschlüsse nur noch an der CME statt. Im Jahr 2005/06 kam es als Folge der Hurrikan-Saison 2005 in den USA (u. a. Hurrikan Katrina) zu einem sprunghaften Anstieg der Zahl der Abschlüsse und des Volumens, was sich in den darauffolgenden Jahren nicht wiederholte. Allerdings wächst der Markt stetig weiter, die Zahl der Abschlüsse stieg von 730.000 (2006/07) auf 985.000 (2007/08) und das Gesamtvolumen (OTC und CME) von 19 Mrd. \$ (2006/07) auf 32 Mrd. \$ (2007/08) [WRMA08b]. Der Handel konzentriert sich dabei auf die USA, der Anteil der europäischen Abschlüsse ist immer weiter gesunken und lag in den letzten Jahren deutlich unter 10 % [WRMA08a]. Nachdem 2001 die Londoner Börse LIFFE (**L**ondon **I**nternational **F**utures and **O**ptions **E**xchange) Wetterderivate in ihren Handel aufgenommen hatte, wurde dieser wegen geringer Nachfrage bald wieder eingestellt. Auch die Handelsplattform der Deutschen Börse AG „Xelsius.com“ stellte ihren Handel mit Wetterderivaten mittlerweile wieder ein [HH06]. Somit ist die CME derzeit die einzige Börse, an der Wetterderivate gehandelt werden. Angeboten werden Wetterderivate von Banken und Rückversicherern, aber auch von Versorgungsunternehmen, die ihr Wetterrisiko damit absichern. Im März 2008 wurde „Celsius Pro“¹⁰ gegründet, eine Firma aus Zürich und Partner der Rückversicherung „Swiss Re“. Sie hat sich auf den Verkauf von Wetterderivaten an europäische Kunden spezialisiert und bietet auf ihrer Internetseite die Möglichkeit, Preise zu berechnen und Wetterderivate direkt abzuschließen.

1.1.3 Interessenten an Wetterderivaten

Untersuchungen¹¹ zeigen, dass ein Anstieg der Durchschnittstemperatur im Sommer um ein Grad Celsius in den USA zu einer Umsatzsteigerung von Speiseeis um 3 % und von Bier um 2 % führt. Währenddessen sinkt der Umsatz der Schmuckbranche um 0,5 %, der der Autoindustrie um 1 % und der der Computerhändler um 1,5 %. Ein Rückgang der Durchschnittstemperatur

¹⁰Celsius Pro: <http://www.CelsiusPro.com>

¹¹Prof. Henry Schäfer, Universität Stuttgart, in *Bauchlandung der Wetterfrösche* („Euro am Sonntag“ vom 28.01.2007)

um ein Grad Celsius im Winter führt in den USA zu einer Absatzsteigerung von Öl und Strom um 4,5 %, um 1,5 % im Einzelhandel und um 1 % in der Tourismusbranche. Allerdings sinkt gleichzeitig der Umsatz der Möbelindustrie um 1,5 % und der der Autoindustrie um 3 %.

Somit ergeben sich vielseitige Möglichkeiten für die Anwendung von Wetterderivaten. Dabei geht es aber nicht um Spekulation, also „Wetten auf das Wetter“, sondern um Absicherung von Einnahmeausfällen in wettersensiblen Branchen¹². Eine Umfrage der WRMA¹³ im Jahr 2007 ergab, dass 47 % der Wetterderivate weltweit von Firmen aus dem Energiesektor nachgefragt werden, 14 % von der Landwirtschaft, 9 % vom Einzelhandel, jeweils 6 % vom Transport- und Baugewerbe sowie 18 % aus anderen Sektoren [WRMA08a].

Der große Anteil der **Energiebranche** erklärt sich durch ihre starke Wetterabhängigkeit. Die Nachfrage nach Öl und Gas zum Heizen fällt bei milden Temperaturen niedriger aus, ebenso wie die Nachfrage nach Strom zum Kühlen. Auch das Angebot wird vom Wetter beeinflusst: Erneuerbare Energiequellen benötigen ausreichend Sonnenschein (Solarkraftwerke), Niederschlag (Wasserkraftwerke) oder Wind (Windparks). Aber auch die fossile Energiegewinnung benötigt genügend Kühlwasser, das bei hohen Temperaturen knapp wird, so dass Kernkraftwerke abgeschaltet werden müssen. Abbildung 1.3 zeigt, von welchen Faktoren der Strompreis beeinflusst wird, neben dem Konsumentenverhalten, den Rohstoffpreisen und der Netzsituation auch vom Wetter.

Beispiele für Absicherungen von Wetterrisiken im Energiesektor in Deutschland sind neben den bereits in Abschnitt 1.1.1 erwähnten Wetterderivaten der Berliner „Bewag“ und des Elektrizitätswerks Dahlemburg die der Stadtwerke Dessau (Absicherung gegen zu warmen Winter, Dezember 2001), des Gruppen-Gas- und Elektrizitätswerks Bensheim (Absicherung gegen zu kalten Winter, Januar 2002), der Mannheimer Versorgungs- und Verkehrsgesellschaft (Absicherung gegen zu kalten Winter, Winter 2002) und des Hamburger Emissionshauses „König & Cie.“ (Absicherung der Anleger in Windkraft-Fonds vor bedingten Einnahmeausfällen, Juli 2003) [Mey03].

Die **Landwirtschaft** befindet sich in der Umfrage auf dem zweiten Platz. Theoretisch ist die Verwendung von Wetterderivaten in der Landwirtschaft gut erforscht, allerdings finden sie in Deutschland in der Praxis wenig Anwendung. Musshoff/Hirschauer [MH08, HM08] modellieren ein Wetterderivat für eine Farm in Brandenburg und kommen zu dem Ergebnis, dass ein Handel von Wetterderivaten für Landwirte durchaus von Vorteil ist und eine sinnvolle Ergänzung zur klassischen Hoferlösversicherung darstellt.

Auch im **Einzelhandel**, der **Tourismusindustrie** und dem **Gaststättengewerbe** können Wetterderivate zur Absicherung gegen wetterbedingte Einnahmeausfälle sinnvoll eingesetzt werden, zum Beispiel sicherte sich die Molkerei „Meggle“ (Kräuterbutter) 2002 gegen eine verregnete Grillsaison ab, die Blumeninsel Mainau im Bodensee 2002 und 2003 gegen einen verregneten Sommer, ebenso der Golfplatz „Apeldör“ in Schleswig-Holstein [Mey03]. Und wie bereits in Abschnitt 1.1.1 erwähnt schlossen die Münchener Wiesnwirte im Jahr 2000 das erste deutsche Wetterderivat ab und sicherten sich auch danach mit Wetterderivaten ab (siehe Beispiel aus Abbildung 1.1).

1.1.4 Wetterindizes

Generell können Wetterderivate auf beliebige Wetterereignisse abgeschlossen werden. Entscheidend dabei ist, dass die meteorologischen Daten von einer unabhängigen Wetterstation bereitge-

¹²Bei der Recherche antwortete eine badische Brauerei auf die Frage, ob sie Wetterderivate verwende, folgendermaßen: „Der Abschluss von Wetterderivaten ist ein hochspekulatives Geschäft. Als seriöses Unternehmen haben wir uns dazu entschlossen, keine Wetterderivate abzuschließen.“ Hans Esser von Finanztrainer.com sagte in einem Interview mit der „FAZ“ am 1. Juni 2002: „Wetterabhängige Unternehmen, die sich nicht um das Management ihrer Wetterrisiken scheren, sind die eigentlichen Spekulanten. Sie hoffen, dass der Wettergott sie nicht im Stich lässt. Die Unternehmen, die ihre Wetterrisiken absichern, tun das genaue Gegenteil. Sie zocken nicht.“

¹³Weather Risk Management Association: <http://www.wrma.org/>

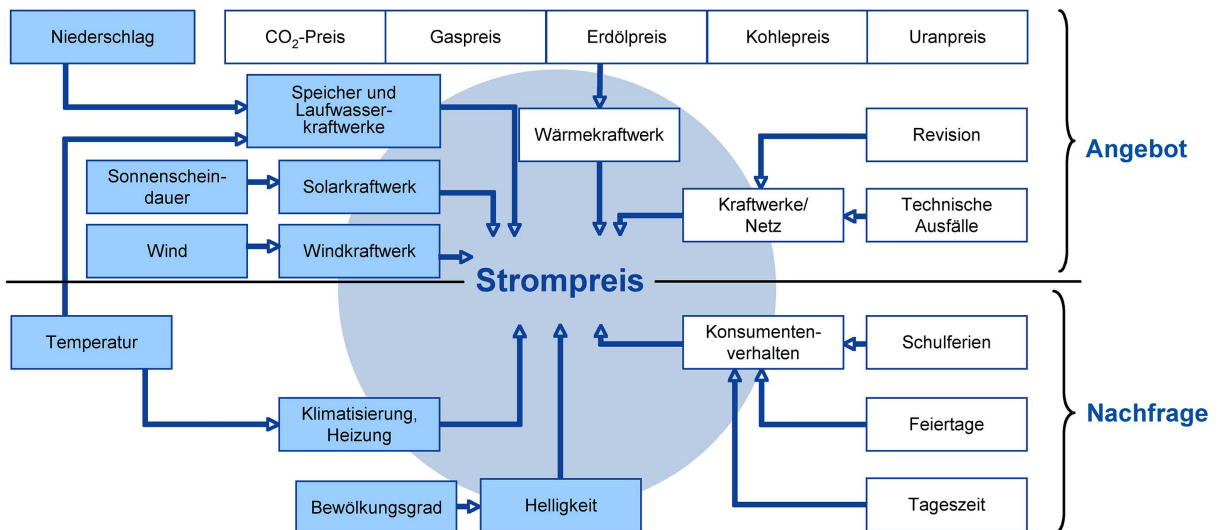


Abbildung 1.3: Wettereinflüsse (blau) und sonstige Einflüsse auf den Strompreis; die Grafik basiert auf [RWE08].

stellt werden. Für Temperatur-, Niederschlags- und Windderivate gibt es einige standardisierte Indizes, die im Folgenden definiert werden.

Die den mit MATLAB[®] erstellten Grafiken zugrundeliegenden Daten deutscher Städte stammen meist vom Deutschen Wetterdienst¹⁴ (DWD), der Klimadaten deutscher Stationen frei zugänglich zur Verfügung stellt (Details siehe Kapitel 2.1). Für einige Städte außerhalb Deutschlands sowie für Berlin und Essen liefert die Chicago Mercantile Exchange Group¹⁵ (CME) historische Wetterdaten.

Temperatur

An der CME werden Verträge auf Basis von fünf Temperaturindizes gehandelt. Grundlage der meisten Temperaturindizes ist die tägliche Durchschnittstemperatur (DAT, *Daily Average Temperature*), die wie folgt definiert ist:

Definition 1.1.1. An einer bestimmten Wetterstation seien T_t^{\max} und T_t^{\min} die Maximal- bzw. Minimaltemperatur des t -ten Tages, gemessen in Grad Celsius, $t \in \mathbb{N}$. Dann ist die **Durchschnittstemperatur (DAT)** des Tages t definiert durch:

$$T_t := \frac{T_t^{\max} + T_t^{\min}}{2}. \quad (1.1)$$

Die täglichen Minimal- und Maximaltemperaturen 2008 in Berlin-Tempelhof und die daraus nach Def. 1.1.1 errechnete tägliche Durchschnittstemperatur DAT sind in Abbildung 1.4 zu sehen. Abbildung 1.5 zeigt tabellarisch die Höchst- und Tiefstwerte von sieben Tagen im Juli 2008 in Berlin und die daraus berechnete DAT.

Man beachte, dass die so definierte Durchschnittstemperatur sich von einer allgemeinen Durchschnittstemperatur unterscheidet. Abbildung 1.6 zeigt die DAT im Vergleich zu der vom Deutschen Wetterdienst veröffentlichten Durchschnittstemperatur, die auf 24 Messungen pro Tag basiert und sich nicht nur nach Definition 1.1.1 als der Mittelwert der Höchst- und Tiefstwerte errechnet (siehe auch Abbildung 1.5). Im Jahr 2008 schwankte die Abweichung von $-1,9$ bis $+2,25$

¹⁴Deutscher Wetterdienst: <http://www.dwd.de>

¹⁵Chicago Mercantile Exchange Group: <http://www.cmegroup.com>

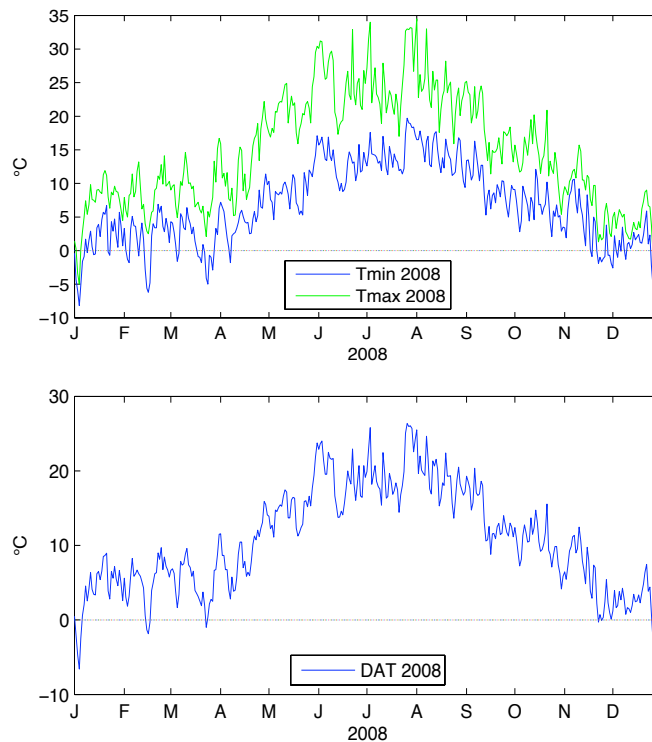


Abbildung 1.4: Minimal- und Maximaltemperaturen 2008 (oben) und die daraus errechnete tägliche Durchschnittstemperatur (DAT, unten) 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof, Daten: DWD

Datum 2008	21.07.	22.07.	23.07.	24.07.	25.07.	26.07.	27.07.
Tiefstwert	11,9	12,1	11,4	12,2	17,4	19,7	19,0
Höchstwert	17,0	21,5	24,6	27,6	32,7	33,0	32,9
DAT	14,45	16,80	18,00	19,90	25,05	26,35	25,95
HDD	3,55	1,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
CDD	0,00	0,00	0,00	1,90	7,05	8,35	7,95
Ø-Temp. DWD	14,4	16,2	18,1	20,4	24,5	25,5	26,2

Abbildung 1.5: Minimal- und Maximaltemperaturen vom 21.07.2008 bis zum 27.07.2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof, die daraus berechnete DAT, die täglichen HDDs und CDDs sowie die Durchschnittstemperatur des DWD, Daten: DWD

mit Mittelwert $-0,07$ und Standardabweichung $0,57$. Im gesamten Zeitraum vom 01.01.1991 bis zum 31.12.2008 lag die Differenz zwischen DAT und DWD-Durchschnittstemperatur zwischen $-3,9$ und $+4,2$ mit Mittelwert $-0,03$ und Standardabweichung $0,9$.

Um eine bessere Vergleichbarkeit zu ermöglichen und den Handel zu erleichtern, wurden einige auf der täglichen Durchschnittstemperatur basierende Indizes definiert. Die am weitesten verbreiteten Temperaturindizes sind Heating-Degree-Days (HDDs) und Cooling-Degree-Days (CDDs). 2005/06 basierten 79% des Nominalvolumens aller abgeschlossenen Verträge auf HDDs und 18% auf CDDs [WRMA06].

Ein Heating-Degree-Day ist die negative Abweichung der täglichen Durchschnittstemperatur von einem Referenzwert.

Definition 1.1.2. Der *Heating-Degree-Day (HDD)* eines Tages t , $t \in \mathbb{N}$, ist definiert als der Wert, um den die Durchschnittstemperatur des Tages t einen Referenzwert ρ unterschreitet, d. h.

$$\text{HDD}_t := \max(0, \rho - T_t) = (\rho - T_t)^+, \quad (1.2)$$

wobei $(\dots)^+$ den Positivteil bezeichnet.

Hierbei wird ρ meist gleich 18°C bzw. $65^\circ\text{Fahrenheit}$ gesetzt. Der Name *Heating-Degree-Day* kommt daher, dass die meisten Heizungen bei täglichen Durchschnittstemperaturen unter 18°C eingeschaltet werden. Die kumulierten Heating-Degree-Days sind die Summe der täglichen HDDs für jeden Tag der betrachteten Periode.

Definition 1.1.3. Die (kumulierten) *Heating-Degree-Days* über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, sind definiert als:

$$\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) := \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \text{HDD}_t = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \max(0, \rho - T_t). \quad (1.3)$$

Ein Cooling-Degree-Day ist die positive Abweichung der täglichen Durchschnittstemperatur von einem Referenzwert.

Definition 1.1.4. Der *Cooling-Degree-Day (CDD)* eines Tages t , $t \in \mathbb{N}$, ist definiert als der Wert, um den die Durchschnittstemperatur eines Tages einen Referenzwert ρ überschreitet:

$$\text{CDD}_t := \max(0, T_t - \rho) = (T_t - \rho)^+. \quad (1.4)$$

Auch hier wird ρ meist gleich 18°C bzw. $65^\circ\text{Fahrenheit}$ gesetzt. Der Name *Cooling-Degree-Day* kommt daher, dass in den USA die meisten Klimaanlage bei Durchschnittstemperaturen über 18°C ($\approx 65^\circ\text{Fahrenheit}$) angeschaltet werden. Die kumulierten Cooling-Degree-Days sind die Summe der täglichen CDDs für jeden Tag der betrachteten Periode.

Definition 1.1.5. Die (kumulierten) *Cooling-Degree-Days* über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, sind definiert als:

$$\text{CDD}(\tau_1, \tau_2) := \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \text{CDD}_t = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \max(0, T_t - \rho). \quad (1.5)$$

In der Tabelle in Abbildung 1.5 sind die nach den Definitionen 1.1.2 und 1.1.4 berechneten täglichen HDD- und CDD-Werte in Berlin vom 21.07.2008 bis zum 27.07.2008 angegeben. Abbildung 1.7 zeigt die täglichen HDDs und CDDs für das ganze Jahr 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof.

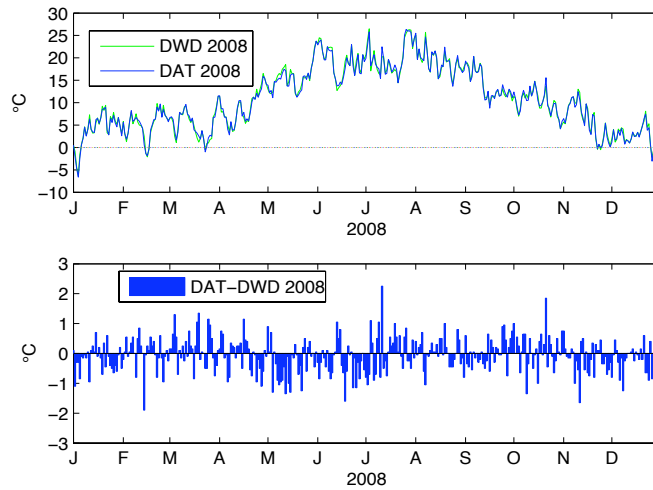


Abbildung 1.6: Oben: DAT und Durchschnittstemperaturen des DWD 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof. Unten: Differenz aus DAT und DWD, Daten: DWD

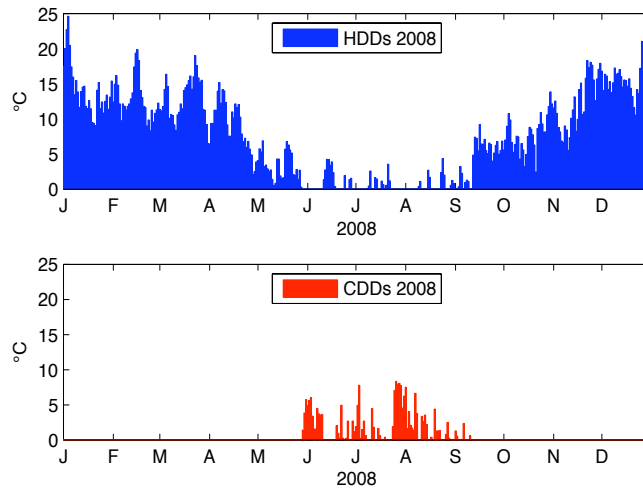


Abbildung 1.7: HDDs und CDDs 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof

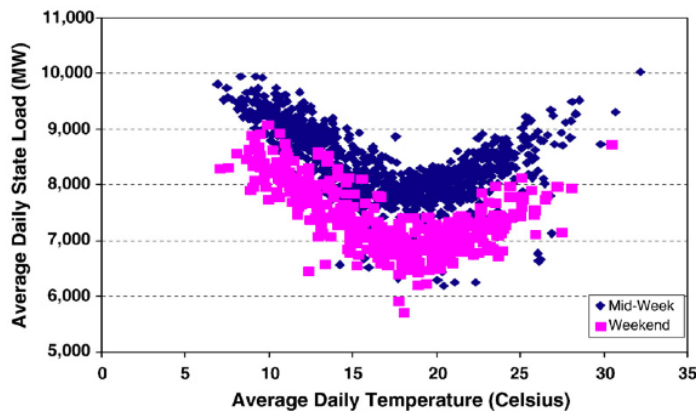


Abbildung 1.8: Zusammenhang zwischen täglicher Durchschnittstemperatur und täglicher durchschnittlicher Stromlast 1997-2005 in New South Wales (Australien), Quelle: [SS07]

Der Zusammenhang zwischen Stromverbrauch und täglicher Durchschnittstemperatur wird aus Abbildung 1.8 deutlich, wo die tägliche durchschnittliche Stromlast 1997-2005 in New South Wales (Australien) mit der täglichen Durchschnittstemperatur verglichen wird. Svec/Stevenson [SS07] errechnen eine Korrelation von 0,8. Die Abbildung macht auch deutlich, dass der Referenzwert $\rho = 18^\circ\text{C}$ als Grenze zwischen Heizen und Kühlen (zumindest für Australien) sinnvoll ist.

Für die europäischen Städte, für die an der CME standardisierter Handel von Wetterderivaten organisiert wird, können neben Derivaten auf HDDs und CDDs auch welche auf den Index der kumulierten Durchschnittstemperatur (**CAT**, *Cumulative Average Temperature*) gehandelt werden. Der CAT-Index ist die Summe der täglichen Durchschnittstemperaturen für jeden Tag der betrachteten Periode.

Definition 1.1.6. Die *kumulierte Durchschnittstemperatur (CAT)* über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, ist definiert als:

$$\text{CAT}(\tau_1, \tau_2) := \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} T_t. \quad (1.6)$$

Abbildung 1.9 zeigt die über einen Monat kumulierten HDDs und CDDs von 2002 bis 2008 für Berlin-Tempelhof und im Vergleich dazu die kumulierte Durchschnittstemperatur CAT für jeden Monat.

Zwischen den vorgestellten Indizes HDD, CDD und CAT besteht folgender Zusammenhang: Da stets gilt, dass

$$\max(x - \rho, 0) - \max(\rho - x, 0) = x - \rho,$$

erhält man die sogenannte **HDD-CDD-Parität** an einem Tag t , $t \in \mathbb{N}$,

$$\text{CDD}_t - \text{HDD}_t = T_t - \rho,$$

oder für einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 mit $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$\text{CDD}(\tau_1, \tau_2) - \text{HDD}(\tau_1, \tau_2) = \text{CAT}(\tau_1, \tau_2) - \rho \cdot (\tau_2 - \tau_1 + 1). \quad (1.7)$$

Für die beiden japanischen Städte Tokio und Osaka basieren die CME-gehandelten Wetterderivate auf dem Pacific-Rim-Index (PRIM), der die durchschnittliche Tagestemperatur über einen Monat oder eine Jahreszeit misst. Pacific Rim bedeutet übersetzt „Pazifik-Anrainer“.

Definition 1.1.7. Der *Pacific-Rim-Index (PRIM)* über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, ist definiert als:

$$\text{PRIM}(\tau_1, \tau_2) := \frac{1}{\tau_2 - \tau_1 + 1} \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} T_t.$$

Die tägliche Durchschnittstemperatur 2008 in Tokio und die daraus berechnete monatliche Durchschnittstemperatur, der monatliche PRIM-Index, sind in Abbildung 1.10 zu sehen. Hierbei ist die tägliche Durchschnittstemperatur allerdings nicht wie in Definition 1.1.1 als Mittelwert von Minimum und Maximum berechnet, sondern als Mittelwert von stündlichen Temperaturmessungen.

Ein weiterer Temperaturindex ist die Anzahl von Frosttagen. Die CME liefert Daten über Frosttage in Amsterdam. Die Daten werden nicht an Wochenenden und nur für Amsterdam-Schiphol erhoben.

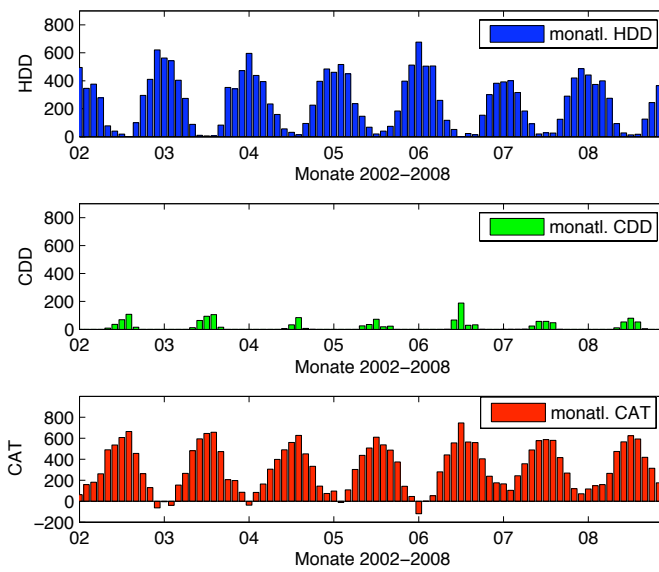


Abbildung 1.9: Zahl der monatlichen HDDs, CDDs und der monatlichen CAT von 2002 bis 2008 in Berlin-Tempelhof

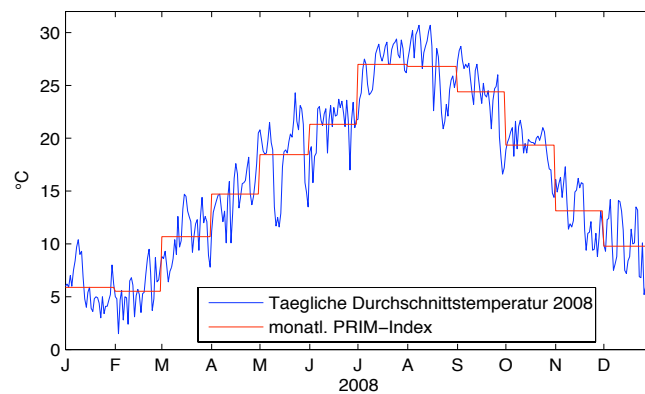


Abbildung 1.10: Tägliche Durchschnittstemperatur 2008 in Tokio und der daraus berechnete monatliche PRIM-Index, Daten: CME

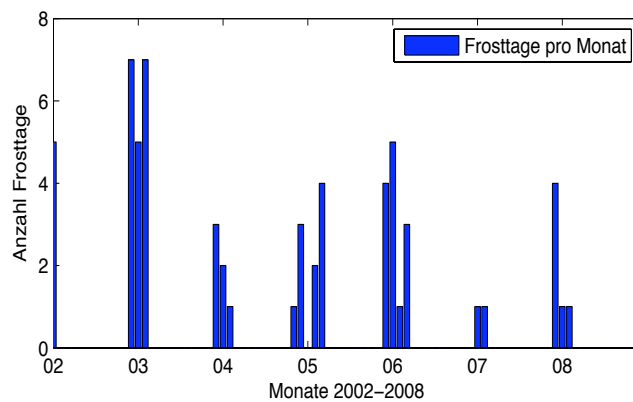


Abbildung 1.11: Zahl der monatlichen Frosttage in Amsterdam-Schiphol 2002-2008, Daten: CME

Definition 1.1.8. Ein **Frosttag** muss nach Definition der CME eine oder mehrere der folgenden Bedingungen erfüllen:

- Die Temperatur um 7 Uhr Ortszeit ist höchstens $-3,5^\circ$ Celsius.
- Die Temperatur um 10 Uhr Ortszeit ist höchstens $-1,5^\circ$ Celsius.
- Die Temperaturen um 7 Uhr und 10 Uhr Ortszeit sind höchstens $-0,5^\circ$ Celsius.

Die Zahl der monatlichen Frosttage in Amsterdam 2002-2008 ist in Abbildung 1.11 abgebildet.

Wetterderivate müssen nicht auf der Temperatur basieren. Im Prinzip ist jedes Wetterereignis denkbar, das von einer unabhängigen Wetterstation aufgezeichnet wird. 2005/06 basierten außerhalb der CME 72% aller Wetterderivate auf der Temperatur, 14% auf Regen und 14% auf anderen Wetterereignissen [WRMA06].

Niederschlag

Im Folgenden geben wir die zwei wichtigsten, an der CME angebotenen Niederschlagsindizes an.

Definition 1.1.9. Ein **Regentag** ist ein Tag, an dem der Niederschlag an einer Wetterstation die vereinbarte Mindest-Niederschlagsmenge (z. B. 5 mm) übersteigt.

In Abbildung 1.12 sieht man die tägliche Niederschlagsmenge 2008 in Berlin-Tempelhof. Wenn man die Mindest-Niederschlagsmenge auf 5 mm setzt, gab es dort 38 Regentage im Jahr 2008.

Für New York und Boston liefert die CME auch Daten über den Schneefall.

Definition 1.1.10. Der tägliche **Schneefall** ist definiert als die Menge Neuschnee, gemessen in Zoll (inch) oder Zentimeter Höhe, die zwischen 0:00 und 23:59 Uhr an einer Wetterstation gemessen wird.

Abbildung 1.13 zeigt die jährliche Schneefallmenge 2002-2008 in Boston (Logan International Airport) und New York (Central Park).

Wind

An der US Futures Exchange, einer elektronischen Börse für Termingeschäfte in Chicago, werden Windderivate gehandelt, die auf dem *Nordix Wind Speed Index* basieren. Dieser Index misst die Abweichung der Windgeschwindigkeit vom Mittelwert der letzten 20 Jahre.

Definition 1.1.11. Der **Nordix Wind Speed Index** (kurz: *Nordix-Index*) über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, (üblicherweise ein Monat) ist definiert als:

$$N(\tau_1, \tau_2) := 100 + \sum_{i=\tau_1}^{\tau_2} V(i) - v_{20}(i),$$

wobei $V(i)$ die durchschnittliche Windgeschwindigkeit am Tag i bezeichnet und $v_{20}(i)$ die durchschnittliche Windgeschwindigkeit am Tag i der letzten 20 Jahre.

Ein Wert über 100 bedeutet also, dass die Windgeschwindigkeit im betrachteten Zeitraum durchschnittlich höher war als in den letzten 20 Jahren, ein Wert unter 100, dass sie niedriger war. Abbildung 1.14 zeigt den Nordix-Index für drei Gebiete im Bundesstaat New York.

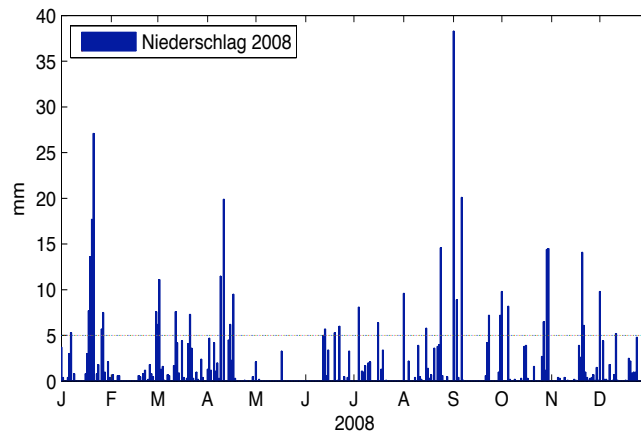


Abbildung 1.12: Täglicher Niederschlag 2008 in Berlin-Tempelhof, Daten: DWD

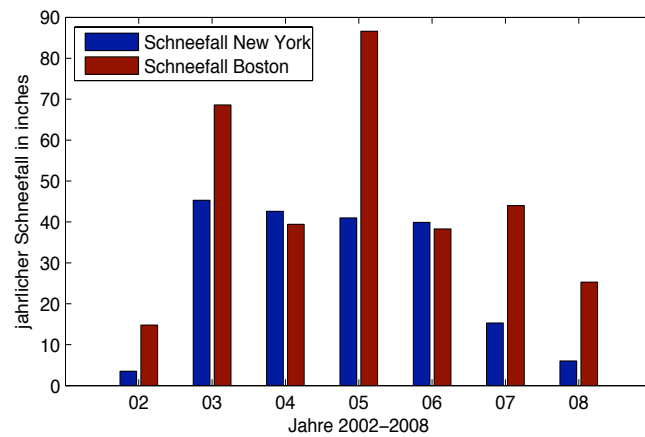


Abbildung 1.13: Jährlicher Schneefall von 2002 bis 2008 in Boston und New York (1 Inch = 2,54 cm), Daten: CME

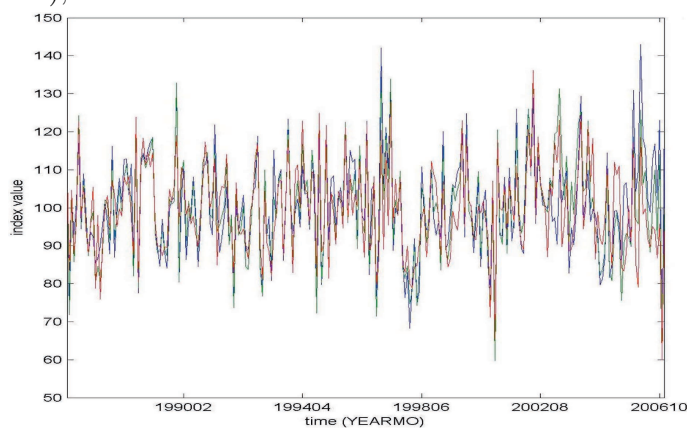


Abbildung 1.14: Nordix-Index für drei Gebiete (blau, grün, rot) im Bundesstaat New York, Quelle: US Futures Exchange

1.1.5 Arten von Derivaten

Wetterderivate können wie andere Derivate auf unterschiedliche Weise strukturiert sein. Ungefähr drei Viertel aller Wetterderivate werden als Optionen gehandelt, ca. ein Viertel sind Swaps [HH06]. Allgemein unterscheidet man folgende Arten von Derivaten:

Ein **Forward** ist ein nicht an der Börse gehandeltes Termingeschäft. Der Verkäufer eines Forwards verpflichtet sich, eine bestimmte Menge zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Forward-Verträge werden nicht an der Börse gehandelt, sondern OTC, und sind im Allgemeinen nicht standardisiert.

Ein **Future** ist im Gegensatz zum Forward ein börsengehandeltes Termingeschäft und meist standardisiert. Käufer und Verkäufer legen vertraglich fest, dass sie zu einem festen Zeitpunkt eine bestimmte Menge eines Gutes zu einem vorher festgelegten Preis liefern bzw. abnehmen. Die Preise sind öffentlich bekannt, also werden die Verträge zum besten verfügbaren Preis abgeschlossen.

Ein **Swap** ist ein Vertrag, bei dem der Käufer eine Zahlung erhält, wenn der Basiswert einen bestimmten Wert übersteigt. Allerdings muss er eine Zahlung leisten, wenn der Basiswert unter diesem Wert bleibt. Somit verkauft er quasi eine Call-Option mit einem bestimmten Strike und kauft eine Put-Option mit demselben Strike (s. u.). Swaps werden meist OTC gehandelt und genau auf die Handelspartner zugeschnitten.

Katastrophenanleihen bzw. Cat-Bonds sichern durch Naturkatastrophen entstehende Schäden ab. Sie zeichnen sich durch sehr hohe Zinsen aus. Der Investor erhält bei Nichteintreten einer Naturkatastrophe sein Kapital, die Zinsen und eine vom Emittenten zu zahlende Prämie zurück. Bei Eintreten einer Katastrophe unterlässt der Emittent diese Zahlung und verwendet das Geld für den Ausgleich der Schäden. CAT-Bonds übertragen somit das Risiko von Naturkatastrophen auf den Kapitalmarkt.

Unter Wetterderivaten sind Optionen am meisten verbreitet. Deshalb befassen wir uns mit ihnen etwas ausführlicher.

Optionen

Eine Option ist ein Vertrag, der dem Besitzer das Recht einräumt, ein Finanzgut (z. B. Anteile an einer Aktie) zu einem festen Preis K zu einem zukünftigen Zeitpunkt T zu handeln. Im Gegensatz zu Forwards und Futures besteht keine Pflicht der Ausübung. Eine **Call-Option** (auch *Kauf-Option* genannt) gibt dem Besitzer das Recht, Anteile zu einem festen Preis zu kaufen. Eine **Put-Option** (auch *Verkauf-Option* genannt) beinhaltet das Recht, zu einem festen Ausgabepreis zu verkaufen. Der Preis K heißt **Strike** oder Ausübungspreis, der Zeitpunkt T **Maturität** oder Ausübungszeitpunkt.

Die Option heißt **europäisch**, wenn sie nur zu einem festen Ablaufzeitpunkt ausgeübt werden kann. Eine **amerikanische** Option hingegen kann der Besitzer zu einem beliebigen Zeitpunkt vor Ablauf der Maturität ausführen. Unter einer **asiatischen** Option versteht man eine Option, deren Wert nicht vom aktuellen Wert abhängt, sondern vom Mittelwert seit Beginn der Laufzeit. Da sich die Bezeichnung „asiatisch“ auf die Berechnung des Wertes, „europäisch“ und „amerikanisch“ aber auf den Einlösezeitpunkt beziehen, können asiatische Optionen auch europäisch oder amerikanisch sein.

Ist der Preis $p_A(T)$ einer Aktie zur Zeit T größer als der Ausübungspreis K , nimmt der Inhaber einer Call-Option auf diese Aktie seine Option wahr, kauft sie zum Preis K und kann sie zum Preis $p_A(T) > K$ am Markt verkaufen. Er macht also einen Gewinn von $p_A(T) - K$.

Ist der Preis der Aktie allerdings niedriger als der festgesetzte Ausübungspreis K , lässt der Besitzer der Call-Option diese verfallen, denn er könnte die Aktie am Markt günstiger zum Preis

$p_A(T) < K$ erwerben. Der Wert (Payoff) einer europäischen Call-Option zur Zeit T ist somit gegeben durch:

$$C(T) = \max(p_A(T) - K, 0) = (p_A(T) - K)^+.$$

Für den Wert einer europäischen Put-Option zur Zeit T gilt dann:

$$P(T) = \max(K - p_A(T), 0) = (K - p_A(T))^+.$$

Damit ergibt sich für das Verhältnis der Preise von Put- und Call-Optionen die **Put-Call-Parität**:

$$\begin{aligned} C(T) - P(T) &= \max(p_A(T) - K, 0) - \max(K - p_A(T), 0) \\ &= p_A(T) - K. \end{aligned}$$

Bei Wetterderivaten ist der Basiswert der Option keine Aktie, sondern ein Wetterindex. Der Wert $C_{\text{CDD}}(T; \tau_1, \tau_2)$ einer europäischen Call-Option auf kumulierte CDDs zur Zeit T ist gegeben durch:

$$C_{\text{CDD}}(T; \tau_1, \tau_2) = \lambda(\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K)^+,$$

wobei λ die vorher vereinbarte Zahlung für jeden Cooling-Degree-Day über dem Strike darstellt. Analog ist der Wert $C_{\text{CDD}}(T; \tau_1, \tau_2)$ einer europäischen Put-Option auf kumulierte CDDs zur Zeit T gegeben durch:

$$P_{\text{CDD}}(T; \tau_1, \tau_2) = \lambda(K - \text{HDD}(\tau_1, \tau_2))^+.$$

Es gibt einige Kennzahlen, die sogenannten **Griechen**, die angeben, wie sich der Wert einer Option bei Änderung bestimmter Parameter verhält: Delta, Gamma, Lambda, Theta, Rho und Omega. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem Delta.

Das **Delta** misst die Sensitivität des Optionswertes bezüglich des Basiswertes und ist definiert als die erste Ableitung des Optionswertes nach dem Basiswert. Bei Call-Optionen ist das Delta immer zwischen 0 und 1, bei Put-Optionen zwischen 0 und -1 . Wenn eine Option **im Geld** (*in the money*) ist, d. h. der aktuelle Wert des Basiswertes höher (Call-Option) bzw. niedriger (Put-Option) ist als der Strike, liegt das Delta zwischen 0,5 und 1 (Call-Option) bzw. $-0,5$ und -1 (Put-Option). Bei einem Delta zwischen 0 und 0,5 bzw. 0 und $-0,5$ ist die Option **aus dem Geld** (*out of the money*). Der Kurs des Basiswertes liegt also unter (Call-Option) bzw. über (Put-Option) dem Strike. Bei einer Option **am Geld** (*at the money*) ist der aktuelle Wert des Basiswertes gleich dem Strike.

Liegt das Delta einer Call-Option beispielsweise nahe bei 1 („weit im Geld“), ändert sich der Optionswert im etwa gleichen Verhältnis wie der Basiswert. Bei einem Delta nahe 0 („weit aus dem Geld“) ändert sich der Wert der Call-Option kaum, wenn sich der Basiswert ändert, da dieser weit unter dem Strike liegt.

Das Delta spielt eine wichtige Rolle beim **Delta-Hedging**. Dabei wird eine Option gegen Kursschwankungen abgesichert, indem man ein „Delta-neutrales“ Portfolio zusammenstellt, d. h. das Delta des gesamten Portfolios ist 0. Anhand des Deltas der Option kann man erkennen, wie viele Anteile am Basiswert man dafür zu halten hat.

Nach dieser Einführung in Wetterderivate kommen wir jetzt im nächsten Abschnitt zu den Grundlagen der Stochastik, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

1.2 Stochastische Grundlagen

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie von \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen $X = (X_t)_{t \in \Theta}$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet man als **stochastischen Prozess** mit Zeitmenge Θ und Zustandsraum \mathbb{R}^d .

Ist die Zeitmenge Θ abzählbar, z. B. $\Theta = \mathbb{N}_0$, so heißt der Prozess **zeitdiskret**. In Abschnitt 1.2.1 werden zeitdiskrete Prozesse vorgestellt, mithilfe derer in Abschnitt 2.2 diskrete Wettermodelle aufgestellt werden.

Ist Θ überabzählbar, z. B. $\Theta = \mathbb{R}_+$, nennt man den stochastischen Prozess **zeitstetig**. In Abschnitt 1.2.2 werden wir zeitstetige Prozesse betrachten, die dann für zeitstetige Wettermodelle in Abschnitt 2.3 benötigt werden.

Wählt man die Menge Θ mehrdimensional, also $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$, spricht man von einem stochastischen Feld. Stochastische Felder werden in Abschnitt 3.3.2 eine Rolle spielen, wenn wir in einem Temperaturmodell neben der Zeit auch noch Abhängigkeit vom Ort zulassen.

1.2.1 Zeitdiskrete Prozesse

Wir beschäftigen uns zunächst mit zeitdiskreten Modellen. Im Folgenden sei die Zeitmenge Θ also abzählbar, insbesondere $\Theta = \mathbb{N}$ oder $\Theta = \mathbb{N}_0$. Zur besseren Unterscheidung werden wir zeitdiskrete stochastische Prozesse mit geschweiften Klammern darstellen, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, wohingegen zeitstetige stochastische Prozesse in runden Klammern stehen, $(X_t)_{t \geq 0}$.

Markov-Kette

Eine wichtige Klasse von stochastischen Prozessen ist die Klasse der Markov-Ketten. Sie bildet das diskrete Analogon zur Klasse der Markov-Prozesse, die wir in Abschnitt 1.2.2 vorstellen werden. Beide zeichnen sich durch ihre Gedächtnislosigkeit aus. Benannt sind sie nach dem russischen Mathematiker Andrei Andrejewitsch Markov (1856-1922). In Abschnitt 2.2.1 wird die Temperatur als Markov-Kette simuliert.

Definition 1.2.1. Sei $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein zeitdiskreter, stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum E . Dann heißt $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ **Markov-Kette**, wenn für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$ und alle Zustände i_0, \dots, i_{t-1} , $i, j \in E$ die folgende Eigenschaft gilt:

$$P(X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i) =: p_{ij}.$$

Diese Eigenschaft wird **Markov-Eigenschaft** genannt und bedeutet, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses nur vom zuletzt beobachteten Zustand abhängt und von den vorherigen Zuständen unabhängig ist.

Eine Markov-Kette ist eindeutig durch die Startverteilung $P(X_0 = i_0) = a_{i_0} \forall i_0 \in E$ und die Übergangsmatrix $M = (p_{ij})_{i,j \in E}$ festgelegt.

ARMA-Modell

Das ARMA-Modell (**A**uto**R**egressive **M**oving **A**verage) ist ein wichtiges lineares Zeitreihenmodell, das die Eigenschaften der Autoregression und des *moving average* (gleitender Mittelwert) vereint. Das ARMA-Modell wird in Abschnitt 2.2.3 verwendet, um den Temperaturprozess zu modellieren.

Definition 1.2.2. Sei $\epsilon = \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen ($\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$) und \mathcal{F}_t die σ -Algebra $\sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t)$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Dann ist der Prozess $h = \{h_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mit $h_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$ ein **ARMA**(p, q)-**Prozess**, $p, q \in \mathbb{N}$, mit den Koeffizienten $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ und $(b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q$, falls gilt:

1. $\mu_t = \mathbb{E}[h_t | \mathcal{F}_{t-1}] = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j}$,
2. $\sigma_t \equiv \sigma \in \mathbb{R}_+$,

wobei $(h_{1-p}, \dots, h_{-1}, h_0) \in \mathbb{R}^{p+1}$ bestimmte Anfangskonstanten sind.

Falls $q = 0$, ergibt sich:

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h_{t-i} + \sigma \epsilon_t \quad (1.8)$$

und man erhält das autoregressive Modell **AR**(p), dessen Entwicklung sich aus den Werten der Vergangenheit und einer Zufallsvariablen zusammensetzt. Ein AR-Prozess wird in Abschnitt 2.2.2 verwendet, um das Temperaturresiduum zu modellieren.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir beim ARMA(p, q)-Prozess auch noch den Fall $p = 0$. Für $p = 0$ gilt:

$$h_t = a_0 + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j} + \sigma \epsilon_t$$

und man bekommt das Moving-Average-Modell **MA**(q), das zum Glätten von Zeitreihen verwendet wird.

ARCH-/GARCH-Modelle

Das ARCH-Modell (*AutoRegressive Conditional Heteroskedastic*) ist ein nicht-lineares Zeitreihenmodell. Es wurde 1982 vom US-amerikanischen Wissenschaftler Robert F. Engle (*1942) beschrieben¹⁶, den die schwedische Reichsbank 2003 für seine „Methoden zur Analyse ökonomischer Zeitreihen mit zeitvariabler Volatilität (ARCH)“ mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften auszeichnete¹⁷. Er verwendete das ARCH-Modell, um die Entwicklung der Variablen $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$ vorherzusagen. Hierbei bezeichnet $(S_t)_{t \geq 0}$ den Preis z. B. eines Bonds. Wir werden hier nur die im Anschluss vorgestellte Erweiterung des ARCH-Modells, das GARCH-Modell, für die Modellierung von Wetterprozessen benötigen.

Definition 1.2.3. Sei $\epsilon = \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen ($\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$) und \mathcal{F}_t die σ -Algebra $\sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t)$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Dann ist der Prozess $h = \{h_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mit $h_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$ ein **ARCH**(p)-Prozess, $p \in \mathbb{N}$, falls gilt:

1. $\mu_t = \mathbb{E}[h_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$,
2. $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i}^2$,

wobei $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ und $(h_{1-p}, \dots, h_0) \in \mathbb{R}^{p+1}$ bestimmte Anfangskonstanten sind.

Die Varianzen σ_t^2 hängen in diesem Modell also von den vorherigen Werten des Prozesses $h_{t-1}^2, h_{t-2}^2, \dots$ ab.

Eine Verallgemeinerung des ARCH-Modells stellt das GARCH-Modell (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic*) dar. Es wurde 1986 von Tim Bollerslev (*1958), einem

¹⁶R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50 (1982), no. 4, 987-1008

¹⁷http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2003/ (Stand: 24. Februar 2009)

dänischen Ökonom, der 1986 bei Robert F. Engle promovierte, eingeführt¹⁸. Robert F. Engle bezeichnete in seiner Vorlesung anlässlich des Nobelpreises 2003 das GARCH-Modell als das „heutzutage am häufigsten benutzte Modell“¹⁹. In den Abschnitten 2.2.4 und 2.2.5 werden wir die Temperatur bzw. die Windgeschwindigkeit als AR-GARCH-Prozess modellieren, also als Kombination eines AR-Prozesses (siehe Def. 1.2.2 und Gleichung (1.8)) und eines GARCH-Prozesses.

Definition 1.2.4. *Wie oben sei $\epsilon = \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen ($\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$) und \mathcal{F}_t die σ -Algebra $\sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t)$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dann ist der Prozess $h = \{h_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ mit $h_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$ ein **GARCH**(p, q)-Prozess, $p, q \in \mathbb{N}$, falls gilt:*

1. $\mu_t = \mathbb{E}[h_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$,
2. $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$

mit $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, und konstanten Anfangswerten $(h_{1-p}, \dots, h_0) \in \mathbb{R}^{p+1}$ und $(\sigma_{1-q}^2, \dots, \sigma_0^2) \in \mathbb{R}_+^{q+1}$.

1.2.2 Zeitstetige Prozesse

Wir gehen jetzt zu zeitstetigen Prozessen über, d. h. die Indexmenge Θ ist überabzählbar, insbesondere $\Theta = \mathbb{R}_+$.

Markov-Prozess

Wie bereits oben erwähnt gibt es zu Markov-Ketten auch eine zeitstetige Version, den Markov-Prozess, dessen Definition der Definition 1.2.1 sehr ähnlich ist. In Abschnitt 2.3.6 wird die Niederschlagsmenge als Sprung-Markov-Prozess modelliert.

Definition 1.2.5. *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein zeitstetiger stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum E . Dann heißt $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein (homogener) **Markov-Prozess**, wenn für jede Familie von Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ und alle Zustände i_0, \dots, i_{n-1} , $i, j \in E$, die folgende Eigenschaft gilt (Markov-Eigenschaft):*

$$P(X_{t_{n+1}}=j | X_{t_0}=i_0, \dots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, X_{t_n}=i) = P(X_{t_{n+1}}=j | X_{t_n}=i).$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$ sind definiert als

$$p_{ij}(t) := P(X_t = j | X_0 = i) \text{ für alle } i, j \in E.$$

Sind $i, j \in E$ mit $i \neq j$, so springt der Prozess X mit Rate q_{ij} von i nach j , falls der folgende Limes existiert:

$$q_{ij} := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} P(X_t = j | X_0 = i).$$

Angenommen, die q_{ij} existieren für alle $i \neq j$ und $\sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$ für alle $i \in E$. Sei dann $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$. Mit dieser Festsetzung gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (P(X_t = j | X_0 = i) - \mathbb{1}_{\{i=j\}}) = q_{ij} \text{ für alle } i, j \in E.$$

Definition 1.2.6. *Unter diesen Voraussetzungen heißt $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ die **Q-Matrix** oder der **infinitesimale Erzeuger** der Übergangswahrscheinlichkeiten $(p(t))_{t \geq 0}$.*

¹⁸T. Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307-327

¹⁹http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2003/engle-lecture.pdf (Stand: 24. Februar 2009)

Poisson-Prozess

Ein Poisson-Prozess, benannt nach Siméon Denis Poisson (1781-1840), ist ein diskreter stochastischer Prozess in stetiger Zeit, der eintretende Ereignisse zählt (die Sprunghöhe zwischen den Ereignissen ist eins). Die Wartezeiten sind exponentialverteilt. In Abschnitt 2.3.6 über den Niederschlag als Sprung-Markov-Prozess werden die „Unwetter“ gemäß einem Poisson-Prozess auftreten.

Definition 1.2.7. Eine Familie $N = (N_t)_{t \geq 0}$ von \mathbb{N}_0 -wertigen Zufallsvariablen heißt **Poisson-Prozess** mit Intensität $\lambda > 0$, wenn gilt:

1. $N_0 = 0$ (Zentriertheit).
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Zerlegung t_0, t_1, \dots, t_n mit $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ unabhängig (unabhängige Zuwächse).
3. Für $t > s \geq 0$ sind die Zuwächse $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$ (Poisson-verteilte Zuwächse), d. h.

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0.$$

Brownsche Bewegung

Die mathematische Idee der Brownschen Bewegung wurde zuerst 1900 vom französischen Mathematiker Louis Bachelier²⁰ (1870-1946) und 1905 vom deutschen Physiker Albert Einstein²¹ (1879-1955) beschrieben. Eine grundlegende Theorie der Brownschen Bewegung sowie das zugehörige Maß im Funktionenraum wurden 1923 vom amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener²² (1894-1964) entwickelt, weshalb man auch von einem *Wiener-Prozess* und dem *Wiener-Maß* spricht. Die Brownsche Bewegung wird eine wichtige Rolle spielen, wenn wir später stochastische Differenzialgleichungen und Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse betrachten.

Definition 1.2.8. Ein reellwertiger, stetiger Gauß-Prozess $W = (W_t)_{t \geq 0}$ heißt (Standard-) **Brownsche Bewegung** oder **Wiener-Prozess**, falls gilt:

1. $W_0 = 0$ (Zentriertheit).
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Zerlegung t_0, t_1, \dots, t_n mit $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ unabhängig (unabhängige Zuwächse).
3. Für $t > s$ sind die Zuwächse $W_t - W_s$ $\mathcal{N}(0, t-s)$ -verteilt (normalverteilte Zuwächse).

Für Erwartungswert und Kovarianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t] &= 0, \\ \text{Cov}[W_s, W_t] &= \mathbb{E}[W_s W_t] = \min(s, t) \text{ für } s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Die Pfade (Realisierungen) der Brownschen Bewegung sind nach dem Satz von Paley-Wiener-Zygmund P -f. s. nirgends differenzierbar (siehe z. B. [Kle06]), also von unbeschränkter Variation auf $[0, T]$, $T \geq 0$, d. h.

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^n |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \right\} = \infty \text{ } P\text{-f. s.}$$

²⁰L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 17 (1900), 21-86

²¹A. Einstein. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17 (1905), 549-560

²²N. Wiener. Differential space. *Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech.*, 2 (1923), 131-174

über alle Unterteilungen von $[0, T]$. Somit lässt sich ein Integral der Form $\int_0^T f(t) dW_t$ nicht als Stieltjes-Integral definieren.

Allerdings sind die Pfade der Brownschen Bewegung von endlicher quadratischer Variation, was die Definition des Itô-Integrals ermöglichen wird.

Satz 1.2.9. Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf (Ω, \mathcal{F}, P) , $T \geq 0$, und $t_k^{(n)} := T \cdot \frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$, eine Zerlegung von $[0, T]$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \left(W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

Obwohl die Brownsche Bewegung Pfade von unbeschränkter Variation hat, kann man aufgrund der endlichen quadratischen Variation ein Integral der Form $\int f(t) dW_t$ definieren, das Itô-Integral, benannt nach dem japanischen Mathematiker Kiyoshi Itô (1915-2008). Für die Herleitung über Treppenfunktionen sei auf Deck [Dec06] verwiesen. Wir geben im Folgenden die Definition für \mathcal{L}^2 -Prozesse an:

Definition 1.2.10. Sei $T > 0$. \mathcal{L}^p bezeichne die Menge aller reellwertigen, messbaren, p -fach integrierbaren Funktionen. Eine Funktion f heißt p -fach integrierbar (mit $p \in [1, \infty]$), wenn $|f|^p$ integrierbar ist. Beschreibe $\mathcal{T}([0, T])$ die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[0, T]$, $T > 0$. $\mathcal{T}^p([0, T])$ ist definiert als $\mathcal{T}^p([0, T]) := \mathcal{T}([0, T]) \cap \mathcal{L}^p([0, T])$. Für $f \in \mathcal{L}^2([0, T])$ wähle $f_n \in \mathcal{T}^2([0, T])$ mit $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^2([0, T])$. Dann ist das **Itô-Integral** über f definiert durch:

$$I(f) := \int_0^T f(t) dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) dW_t \text{ in } \mathcal{L}^2.$$

Definition 1.2.11. Ein **Itô-Prozess** $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ist ein stetiger, \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess, der für alle $t \in [0, T]$ die folgende Darstellung besitzt:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dW_s \text{ P-f. s.}$$

mit geeigneten $f \in \mathcal{L}^1([0, T])$ und $g \in \mathcal{L}^2([0, T])$. Die Differenzialschreibweise ist gegeben durch:

$$dX_t = f(t) dt + g(t) dW_t.$$

Stochastische Differenzialgleichungen

Mithilfe des Itô-Integrals kann man stochastische Differenzialgleichungen der Form

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

mit messbaren Funktionen $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Die folgenden stochastischen Prozesse werden wir als Lösungen von stochastischen Differenzialgleichungen beschreiben. Außerdem werden in Abschnitt 2.3 einige Wetterprozesse anhand von stochastischen Differenzialgleichungen modelliert. Zunächst geben wir jedoch einen Satz für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von stochastischen Differenzialgleichungen.

Satz 1.2.12. (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Für zwei Funktionen $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte mit einer Konstanten $K > 0$:

1. $|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2$, $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$ (Lipschitz-Stetigkeit).

2. $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$ (lineare Beschränktheit).

Sei x_0 \mathcal{F}_0 -messbar, $\mathbb{E}[x_0^2] < \infty$. Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

eine stetige, adaptierte Lösung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

mit

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty \text{ auf } [0, T].$$

Wenn X und Y stetige, adaptierte Lösungen sind mit $X_0 = Y_0$ und

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[Y_t^2] < \infty,$$

so gilt:

$$P(X_t = Y_t, 0 \leq t \leq T) = 1.$$

Für lineare stochastische Differentialgleichungen lässt sich insbesondere eine explizite Lösung angeben. Zwei wichtige stochastische Prozesse, die sich als Lösungen von linearen stochastischen Differentialgleichungen definieren, sind die geometrische Brownsche Bewegung und der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, die wir jetzt vorstellen werden.

Geometrische Brownsche Bewegung

Die geometrische Brownsche Bewegung spielt eine wichtige Rolle in der Finanzmathematik, weshalb sie manchmal auch *ökonomische* Brownsche Bewegung genannt wird. Sie wird beispielsweise im Black-Scholes-Modell als Modell für die Anlage-Preise benötigt (siehe Abschnitt 1.3.2).

Definition 1.2.13. Ein stochastischer Prozess $S = (S_t)_{t \geq 0}$ heißt **geometrische Brownsche Bewegung**, wenn er der folgenden linearen stochastischen Differentialgleichung genügt:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1.9}$$

mit den Koeffizienten $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Wählt man den Anfangswert S_0 unabhängig von der Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$, findet man folgende explizite Lösung von Gleichung (1.9):

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right).$$

Abbildung 1.15 zeigt Simulationen der geometrischen Brownschen Bewegung für verschiedene Werte von μ .

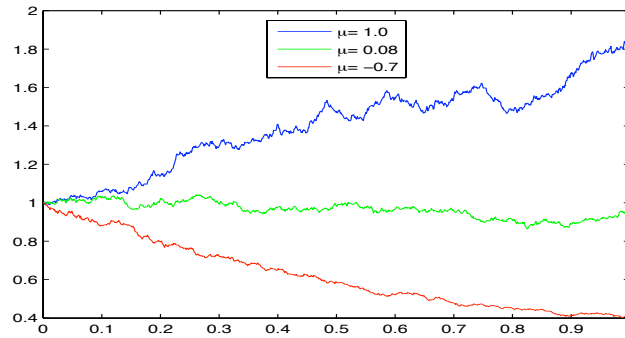


Abbildung 1.15: Simulation der geometrischen Brownschen Bewegung für $\sigma = 0,4$ und verschiedene Werte von μ

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist nach den niederländischen Mathematikern Leonard Ornstein (1880-1941) und George Eugene Uhlenbeck (1900-1988) benannt, die den Prozess 1930 beschrieben²³. In Abschnitt 2.3.1 wird die Temperatur als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert und in den darauffolgenden als Varianten des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

Definition 1.2.14. Ein *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist eine Lösung der linearen stochastischen Differenzialgleichung:

$$dX_t = -\kappa X_t dt + \sigma_t dW_t, \quad \kappa > 0. \quad (1.10)$$

κ gibt an, wie stark der Prozess zum Mittelwert tendiert. Diese Mittelwertannäherung wird „Mean-Reversion“ genannt. $\sigma_t > 0$ ist eine reellwertige, messbare und beschränkte Funktion und beschreibt den Einfluss des Zufalls, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung.

Mit dem Startwert X_0 erhält man als explizite Lösung von (1.10) den Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit

$$X_t = e^{-\kappa t} X_0 + \sigma_t \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s.$$

Für Erwartungswert und Varianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= X_0 e^{-\kappa t}, \\ \text{Var}[X_t] &= \frac{\sigma_t^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}). \end{aligned}$$

Stochastische Rückwärts-Differenzialgleichungen

Stochastische Rückwärts-Differenzialgleichungen haben Verbindungen in viele Bereiche der Mathematik wie Finanzmathematik, stochastische Kontrolltheorie und partielle Differenzialgleichungen. Für eine Einführung und wichtige Ergebnisse sei auf El Karoui/Peng/Quenez [EKPQ97], Kobylanski [Kob00] und Briand/Confortola [BC08] verwiesen.

Definition 1.2.15. Als *stochastische Rückwärts-Differenzialgleichung* (BSDE, *Backward Stochastic Differential Equation*) bezeichnet man eine Gleichung der Form

$$Y_t = \xi + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

²³G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of Brownian motion. *Physical Review*, 36 (1930), 823-841

wobei $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Die zufällige Funktion $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird im Allgemeinen „Generator“ genannt, T der „Endpunkt“ und die \mathbb{R}^n -wertige, \mathcal{F}_T -adaptierte Zufallsvariable ξ die „Endbedingung“. $n \in \mathbb{N}$ gibt die Dimension der BSDE an.

Eine „Lösung“ ist ein Paar $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ von \mathcal{F}_t -adaptierten Prozessen, die bestimmte Integrabilitätseigenschaften haben, abhängig von den Annahmen an F . Wenn F Lipschitz-stetig in Y und Z und ξ quadratisch integrierbar sind, existiert eine Lösung $(Y_t, Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ als Paar von quadratisch integrierbaren, adaptierten Prozessen.

In Abschnitt 3.2.2 werden BSDEs und FBSDEs (*Forward-Backward Stochastic Differential Equations*) verwendet, um die Preise von Derivaten mit nicht handelbaren Basiswerten zu bestimmen.

Der Satz von Girsanov

Der Satz von Girsanov, benannt nach dem russischen Mathematiker Igor Girsanov²⁴ (1934-1967), beschreibt das Verhalten von stochastischen Prozessen beim Wechsel zu einem risikoneutralen Maß.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine an \mathcal{F}_t adaptierte Brownsche Bewegung. Sei außerdem $a = (a_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein an \mathcal{F}_t adaptierter stochastischer Prozess mit

$$P \left(\int_0^t a_s^2 ds < \infty \right) = 1, \quad t \leq T < \infty.$$

Sei $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ ein stochastischer Prozess mit

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t a_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a_s^2 ds \right).$$

Wenn die sogenannte Novikov-Bedingung $\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t a_s^2 ds \right) \right] < \infty$ erfüllt ist, gilt:

$$\mathbb{E} [Z_T] = 1,$$

so dass $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist.

Da Z_T P -f. s. positiv ist mit Erwartungswert 1, kann man ein Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P}_T auf (Ω, \mathcal{F}_T) definieren durch:

$$\tilde{P}_T(A) = \mathbb{E} [\mathbf{1}_A Z_T], \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Um den Satz von Girsanov formulieren zu können, fehlt uns noch der Begriff des äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Definition 1.2.16. Ein Maß \tilde{P} auf (Ω, \mathcal{F}) heißt **absolutstetig** bezüglich P ($\tilde{P} \ll P$), falls $\tilde{P}(A) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) = 0$. Zwei Maße P und \tilde{P} auf dem gleichen messbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) heißen **äquivalent** ($\tilde{P} \sim P$), falls $\tilde{P} \ll P$ und $P \ll \tilde{P}$.

$P_T = P|_{\mathcal{F}_T}$ ist die Restriktion des Maßes P auf \mathcal{F}_T . Dann ist \tilde{P}_T äquivalent zu P_T , $\tilde{P}_T \sim P_T$.

Satz 1.2.17. (Satz von Girsanov)

Unter den oben genannten Voraussetzungen sei

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t a_s ds, \quad t \leq T.$$

Dann ist $\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t, \tilde{P}_T)_{t \leq T}$ unter dem zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P} eine Brownsche Bewegung.

²⁴I. V. Girsanov. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and its Applications*, 5 (1962), 3, 285-301

Fraktionale Brownsche Bewegung

Die Bezeichnung „fraktionale Brownsche Bewegung“ wurde 1968 vom französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (*1924) und John W. van Ness eingeführt²⁵. Die fraktionale Brownsche Bewegung ist eine Verallgemeinerung der Brownschen Bewegung. Im Gegensatz zu dieser können bei der fraktionalen Brownschen Bewegung abhängige Zuwächse auftreten, festgelegt durch den Hurst-Parameter H (benannt nach dem britischen Hydrologen Harold E. Hurst (1880-1978)). Die fraktionale Brownsche Bewegung wird in Abschnitt 2.3.2 verwendet werden, wenn wir ein Modell der Temperatur als fraktionalen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess vorstellen. Dieser ist die Lösung einer stochastischen Differenzialgleichung, die von einer fraktionalen Brownschen Bewegung angetrieben wird.

Definition 1.2.18. Ein reellwertiger, stetiger Gauß-Prozess $W^H = (W_t^H)_{t \geq 0}$ heißt (Standard-) **fraktionale Brownsche Bewegung** mit Hurst-Exponent H , $0 < H \leq 1$, falls gilt:

1. $\mathbb{E}[W_t^H] = 0$ für alle $t \geq 0$,
2. $\text{Cov}[W_t^H W_s^H] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$, $s, t > 0$.

Die fraktionale Brownsche Bewegung W^H ist ein *selbstähnlicher* Prozess. Das bedeutet, dass $W_{\alpha t}^H$ dieselbe Verteilung hat wie $\alpha^H W_t^H$ für jedes $\alpha > 0$ (Skaleninvarianz).

Wenn $H > \frac{1}{2}$ ist, besteht eine positive Korrelation zwischen den Inkrementen, bei $H < \frac{1}{2}$ eine negative. Ist H nahe bei null, sind die Pfade sehr „rau“, wohingegen sie für H nahe bei eins recht glatt sind. Abbildung 1.16 zeigt drei Realisierungen der fraktionalen Brownschen Bewegung²⁶ für $H = 0,1$, $H = \frac{1}{2}$ und $H = 0,9$. Für $H = \frac{1}{2}$ erhält man wieder die klassische Brownsche Bewegung mit unabhängigen Zuwächsen:

$$\text{Cov}[W_t^{1/2} W_s^{1/2}] = \frac{1}{2}(|s| + |t| - |t-s|) = \min(s, t).$$

Für $H \neq \frac{1}{2}$ ist die fraktionale Brownsche Bewegung weder ein Markov-Prozess noch ein Semi-Martingal, weshalb die Standardtechniken der stochastischen Analysis nicht direkt angewendet werden können. Für $H > \frac{1}{2}$ ist die quadratische Variation der fraktionalen Brownschen Bewegung null und die Pfade sind glatter, was stochastische Integration ermöglicht. Für die Theorie des fraktionalen Itô-Kalküls verweisen wir auf Hu/Øksendal [HØ99]. Wir geben aus dieser Arbeit eine „fraktionale Version“ des Satzes von Girsanov für $\frac{1}{2} < H < 1$ an.

Satz 1.2.19. Sei $W^H = (W_t^H)_{t \geq 0}$ eine fraktionale Brownsche Bewegung mit $\frac{1}{2} < H < 1$ und \mathcal{F}_t^H die von W_s^H , $s \leq t$, erzeugte σ -Algebra. Sei $\phi(s, t) = H(2H-1)|s-t|^{2H-2}$, $s, t \geq 0$ und der Hilbert-Raum $L_\phi^2(\mathbb{R})$ die Menge der Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$|f|_\phi^2 := \langle f, f \rangle_\phi$$

mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle_\phi := \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(s, t) ds dt$. Seien θ, Θ messbare Funktionen mit Träger auf $[0, T]$. θ sei stetig und Θ die Lösung der Integralgleichung $\int_0^T \Theta_s \phi(s, t) ds = \theta_t$ für $0 \leq t \leq T$. Dann ist

$$\tilde{W}_t^H = W_t^H - \int_0^t \theta_s ds$$

eine fraktionale Brownsche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P} auf $(\Omega, \mathcal{F}_T^H)$, das äquivalent ist zu P .

²⁵B. B. Mandelbrot and J. W. van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* 10 (1968), no. 4, 422-437

²⁶Sie wurden mit dem MATLAB[®]-Befehl `wfbm(H,500)` mit dem Hurst-Exponenten H erstellt.

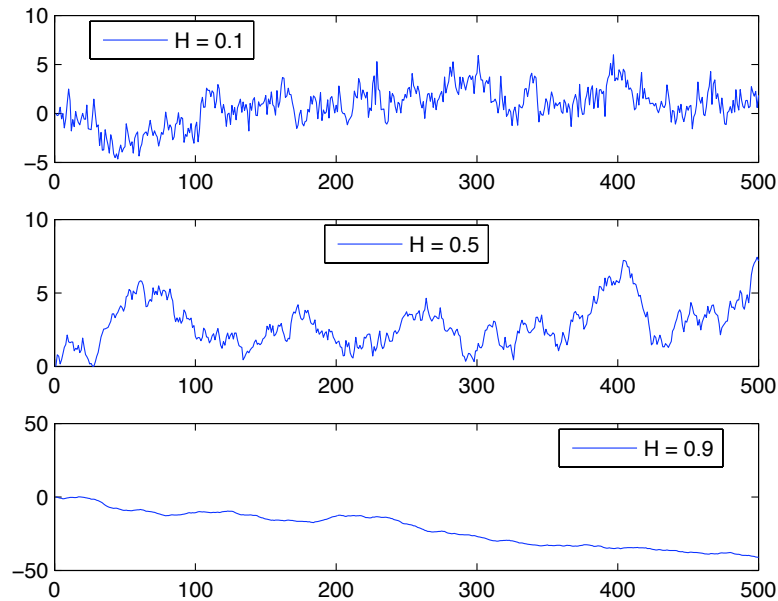


Abbildung 1.16: Simulation der fraktionalen Brownschen Bewegung für drei verschiedene Hurst-Exponenten

Lévy-Prozess

Wir kommen nun zu einer recht allgemeinen Klasse von stochastischen Prozessen, den Lévy-Prozessen, zu denen zwei der bereits vorgestellten Prozesse gehören. Benannt sind sie nach dem französischen Mathematiker Paul Lévy (1886-1971). Sie zeichnen sich durch stationäre und unabhängige Zuwächse aus. In Abschnitt 2.3.3 wird die Temperatur als Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert, also als die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung, die statt von einer Brownschen Bewegung von einem Lévy-Prozess angetrieben wird.

Definition 1.2.20. Ein reellwertiger, stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt **Lévy-Prozess**, wenn gilt:

1. $X_0 = 0$ (Zentriertheit).
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Zerlegung t_0, t_1, \dots, t_n mit $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig (unabhängige Zuwächse).
3. $X_t - X_s$ hat dieselbe Verteilung wie X_{t-s} für $t > s$ (stationäre Zuwächse).
4. Die Pfade sind rechtsstetig und die linksseitigen Grenzwerte existieren fast sicher (càdlàg, „continu à droite avec des limites à gauche“).

Der bereits oben beschriebene Poisson-Prozess (Def. 1.2.7) sowie die Brownsche Bewegung (Def. 1.2.8) sind Lévy-Prozesse.

Wir geben jetzt die Lévy-Chintschin-Formel an, benannt nach Paul Lévy und dem russischen Mathematiker Alexander Jakowlewitsch Chintschin (1894-1959):

Satz 1.2.21. (Lévy-Chintschin-Formel)

Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess. Dann hat seine charakteristische Funktion die eindeutige

Darstellung:

$$\mathbb{E} \left[e^{i\lambda X_t} \right] = \exp \left\{ ai\lambda t - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 t + t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y \mathbb{1}_{\{|y| \leq 1\}} \right) \nu(dy) \right\}.$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ und ν ein Borel-Maß, das Lévy-Maß genannt wird:

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} (y^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty.$$

Ein Lévy-Prozess ist durch das Tripel (a, σ^2, ν) eindeutig gegeben.

Im Folgenden wird ein bestimmter Lévy-Prozess genauer betrachtet, der verallgemeinerte hyperbolische Lévy-Prozess.

Verallgemeinerter hyperbolischer Lévy-Prozess

In Abschnitt 2.3.3 wird ein Modell von Benth/Šaltytė-Benth [BŠB05] vorgestellt, in dem die Temperatur als Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert wird, der von einem verallgemeinerten hyperbolischen Lévy-Prozess (*generalized hyperbolic Lévy process*) angetrieben wird. Die Dichte und die charakteristische Funktion der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung sind explizit bekannt, so dass diese Klasse gut geeignet ist für empirische Studien und die Bewertung von Derivaten. Außerdem bildet sie die semi-schweren Schwänze (*semi-heavy tails*) und die Schiefe gut ab, die die Autoren in norwegischen Temperaturdaten beobachten. Wir orientieren uns hier an der Darstellung von Benth/Šaltytė-Benth.

Definition 1.2.22. Die *verallgemeinerte hyperbolische Verteilung* ist eine Familie von unbegrenzt teilbaren Verteilungen mit der Dichtefunktion:

$$f_{gh}(x; \lambda, \mu, \alpha, \beta, \delta) = c (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} \exp(\beta(x - \mu)) \cdot K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right),$$

wobei K_s die modifizierte Bessel-Funktion dritter Art²⁷ mit Index s bezeichnet und die normalisierende Konstante c gegeben ist durch:

$$c = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}.$$

Der Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimmt die Steilheit der Verteilung, $\mu \in \mathbb{R}$ die Lage, $\beta \in \mathbb{R}$ die Schiefe und $\delta \in \mathbb{R}$ die Skalierung. Die Verteilung ist symmetrisch für $\beta = 0$. Der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt die Unterfamilie der verallgemeinerten hyperbolischen Klasse an.

Wenn eine Zufallsvariable X der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung genügt, ist ihre momentenerzeugende Funktion gegeben durch:

$$\mathbb{E} [e^{uX}] = e^{\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\lambda/2} \cdot \frac{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)}{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}$$

für $|\beta + u| < \alpha$. Somit hat diese Familie von Verteilungen endliche Momente jeder Ordnung.

²⁷Für eine Definition der modifizierten Bessel-Funktion siehe z. B. Abramowitz/Stegun [AS72]

Definition 1.2.23. Ein reellwertiger, stochastischer Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ heißt **verallgemeinerter hyperbolischer Lévy-Prozess**, wenn $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess ist mit den bezüglich der verallgemeinerten hyperbolischen Familie verteilten Randwerten L_1 . Dann ist das Lévy-Maß explizit gegeben durch:

$$\ell_{GH}(dz) = |z|^{-1} e^{\beta z} \left(\frac{1}{n^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2 |z|})}{J_\lambda^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_\lambda^2(\delta\sqrt{2y})} \frac{dy}{y} + \lambda e^{-\alpha|z|} \right) dz$$

für $\lambda \geq 0$ und

$$\ell_{GH}(dz) = |z|^{-1} e^{\beta z} \frac{1}{n^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-\sqrt{2y + \alpha^2 |z|})}{J_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_{-\lambda}^2(\delta\sqrt{2y})} \frac{dy}{y} dz$$

für $\lambda < 0$. Hierbei sind J_λ und Y_λ Bessel-Funktionen erster und zweiter Art mit Index λ .

Die verallgemeinerten hyperbolischen Lévy-Prozesse sind reine Sprung-Prozesse mit Pfaden unendlicher Variation.

Zeitstetiges AR-Modell

Zu dem bereits in Gleichung (1.8) erwähnten Modell $AR(p)$ gibt es eine stetige Version, das sogenannte $CAR(p)$ -Modell (*C*ontinuous-*t*ime *A*uto*R*egressive). In den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5 werden die Temperatur und die Windgeschwindigkeit als CAR -Prozesse modelliert.

Definition 1.2.24. Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Ein **$CAR(p)$ -Prozess** $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ ist definiert als der stochastische Prozess in \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, der die vektorielle Ornstein-Uhlenbeck-Gleichung

$$d\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_t dt + \mathbf{e}_p \sigma_t dW_t \tag{1.11}$$

erfüllt, wobei $\sigma_t > 0$ eine reellwertige und quadratisch integrierbare Funktion (auf einem endlichen Zeitintervall) ist und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}_+^p$.

Für den Spezialfall $p = 1$ erhält man wieder den in Def. 1.2.14 eingeführten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

$$dX_t^1 = -\alpha_1 X_t^1 dt + \sigma_t W_t,$$

wobei X_t^q für die q -te Koordinate des Vektors \mathbf{X}_t , $q = 1, \dots, p$, steht.

Die Lösung von (1.11) kann geschrieben werden als

$$\mathbf{X}_t = e^{At} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u dW_u.$$

Nach diesen stochastischen Grundlagen kommen wir jetzt zu den benötigten Konzepten der Finanzmathematik.

1.3 Finanzmathematische Grundlagen

Wir kommen jetzt zu einigen Grundlagen aus der Finanzmathematik. Die hier vorgestellten Begriffe werden in Kapitel 3 für die Bewertung und Absicherung von Wetterderivaten benötigt. Wie schon bei den stochastischen Grundlagen werden wir auch hier zwischen diskreter und stetiger Zeit unterscheiden.

1.3.1 Diskrete Zeit

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Die Folge $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ der σ -Algebren beschreibt die Information, die den Teilnehmern bis zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ zur Verfügung steht. Wir betrachten einen (B, S) -Markt mit $d + 1$ Anlagen. $B = \{B_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ steht für die risikofreie Bank-Anlage (*bank account*) und $S = \{S_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} = \{S_t^1, \dots, S_t^d\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ für d riskante Aktien-Anlagen (*stock*). Es sei erwähnt, dass wir im letzten Kapitel W als Bezeichnung für die Brownsche Bewegung eingeführt haben, um Verwechslungen auszuschließen. Die $\{B_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ sind deterministisch und damit \mathcal{F}_{t-1} -messbar für jedes $t \in \mathbb{N}$, die $\{S_t^i\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ \mathcal{F}_t -messbar für $t \in \mathbb{N}_0$. Die Bank-Anlagen sind somit vorhersehbar, da man zur Zeit $t-1$ schon alle Informationen über den Stand der Bank-Anlagen zum Zeitpunkt t hat. Die Aktien-Anlagen hingegen sind unsicher, ihr tatsächlicher Wert ist erst zur Zeit t bekannt.

Definition 1.3.1. Eine stochastische Folge

$$\xi = \{\beta_t, \xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} = \left\{ \beta_t, \xi_t^1, \dots, \xi_t^d \right\}_{t \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{d+1},$$

wobei β_t \mathcal{F}_{t-1} -messbar ist für $t \in \mathbb{N}$ und ξ_t^i \mathcal{F}_t -messbar für $t \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, d$, heißt **Portfolio** oder **Handelsstrategie** für den (B, S) -Markt und beschreibt die Anteile an den verschiedenen Anlagen, die zum Zeitpunkt t gehalten werden.

Die Variablen $\{\beta_t, \xi_t^1, \dots, \xi_t^d\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ können dabei null, positiv oder auch negativ sein. Letzteres bedeutet, dass der Investor sich Geld von der Bank leiht oder einen Leerverkauf tätigt.

Definition 1.3.2. Der Wert des Portfolios $\xi = \{\beta_t, \xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist die stochastische Folge $V^\xi = \left\{ V_t^\xi \right\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$V_t^\xi = \beta_t B_t + \sum_{i=1}^d \xi_t^i S_t^i.$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\xi_t S_t$ das Skalarprodukt der Vektoren $\xi_t = \{\xi_t^1, \dots, \xi_t^d\}$ und $S_t = \{S_t^1, \dots, S_t^d\}$ mit $t \in \mathbb{N}_0$, also $\xi_t S_t := \sum_{i=1}^d \xi_t^i S_t^i$.

Definition 1.3.3. Ein Portfolio $\xi = \{\beta_t, \xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ heißt **selbstfinanzierend**, wenn sein Wert $V^\xi = \left\{ V_t^\xi \right\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ dargestellt werden kann als

$$V_t^\xi = V_0^\xi + \sum_{j=0}^{t-1} \beta_j (B_{j+1} - B_j) + \sum_{j=0}^{t-1} \xi_j (S_{j+1} - S_j).$$

Das bedeutet, dass sich das Portfolio nur durch Gewinne und Verluste aus den verschiedenen Perioden finanziert und kein Geld von außen hinzukommt.

Definition 1.3.4. Ein Portfolio ξ heißt **zulässig**, wenn es selbstfinanzierend ist und $V_t^\xi \geq 0$ für $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Arbitragefreier Markt

Arbitrage bedeutet, dass ein Investor ohne Startkapital die Chance auf einen Gewinn hat, ohne irgendein Risiko einzugehen. Das ist z. B. der Fall, wenn ein Gut oder eine Anlage auf zwei Märkten bei vollständiger Information zu verschiedenen Preisen gehandelt wird (*Jevons Gesetz von der Unterschiedslosigkeit der Preise*). Auf den Finanzmärkten existiert aufgrund des schnellen Informationsaustauschs nur für sehr kurze Zeit die Möglichkeit zu Arbitrage, da die Preise sich in kurzer Zeit entsprechend anpassen. Deshalb ist Arbitrage-Freiheit in der Finanzmathematik eine wichtige Voraussetzung für Marktmodelle.

Definition 1.3.5. Eine selbstfinanzierende Strategie ξ bietet eine **Arbitrage-Möglichkeit** zur Zeit $T \in \mathbb{N}$, falls für das Startkapital $V_0^\xi \leq 0$ gilt:

$$V_T^\xi \geq 0 \quad P\text{-f. s.}$$

und $V_T^\xi > 0$ mit positiver P -Wahrscheinlichkeit, d. h.

$$P\left(V_T^\xi > 0\right) > 0$$

oder äquivalent $\mathbb{E}\left[V_T^\xi\right] > 0$.

Definition 1.3.6. Es existiert **keine Arbitrage-Möglichkeit** auf einem (B, S) -Markt bzw. dieser Markt ist **arbitragefrei**, falls mit $V_0^\xi = 0$ und $T \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\left(V_T^\xi \geq 0\right) = 1 \Rightarrow P\left(V_T^\xi = 0\right) = 1.$$

In diskreter Zeit ($t = 0, 1, \dots, T$) gilt der folgende Satz, der auch (erster) *Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* genannt wird. Er stellt einen Zusammenhang zwischen arbitragefreien Märkten und Martingalmaßen her.

Satz 1.3.7. Angenommen, ein (B, S) -Markt auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}, P)$ besteht aus einem Bankkonto $B = \{B_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, $B_t > 0$, und endlich vielen Anlagen $S = \{S_t\}_{t \in \mathbb{N}_0} = \{S_t^1, \dots, S_t^d\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. Des Weiteren werde auf diesem Markt zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, \dots, T$ gehandelt. Seien $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Dann ist dieser (B, S) -Markt arbitragefrei genau dann, wenn es (mindestens) ein Maß \tilde{P} gibt, das äquivalent zum Maß P ist (siehe Definition 1.2.16), so dass die d -dimensionale abgezinste Folge $\frac{S}{B} = \left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}_{0 \leq t \leq T}$ ein \tilde{P} -Martingal ist, d. h. es ist

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}}\left[\left|\frac{S_t^i}{B_t}\right|\right] < \infty$$

für alle $i = 1, \dots, d$ und $t = 0, 1, \dots, T$, sowie

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}}\left[\frac{S_t^i}{B_t} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{S_{t-1}^i}{B_{t-1}}$$

für $t = 1, \dots, T$. Das Maß \tilde{P} heißt dann „Martingalmaß“.

Definiere $\mathcal{P}(P)$ als die Menge aller äquivalenten risikoneutralen Maße, d. h.

$$\mathcal{P}(P) := \left\{\tilde{P} \mid \tilde{P} \text{ ist risikoneutrales Maß mit } \tilde{P} \sim P\right\}.$$

Dann erhält man folgende Fassung des Satzes:

Satz 1.3.8. Ein Marktmodell ist arbitragefrei genau dann, wenn $\mathcal{P}(P) \neq \emptyset$. In diesem Fall existiert ein $\tilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ mit einer beschränkten Dichte $Z := d\tilde{P}/dP$.

Um einen vollständigen Markt definieren zu können, benötigen wir noch die folgenden Begriffe:

Definition 1.3.9. Ein **Contingent Claim** ist eine Zufallsvariable X auf dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , so dass

$$0 \leq X < \infty \text{ P-f. s.}$$

Definition 1.3.10. Ein Contingent Claim X heißt **replizierbar**, wenn es eine selbstfinanzierende zulässige Handelsstrategie ξ gibt, so dass

$$X = V_T^\xi \text{ P-f. s.}$$

Definition 1.3.11. Ein arbitragefreies Marktmodell heißt **vollständig**, wenn jeder Contingent Claim replizierbar ist.

Der folgende Satz wird auch als *zweiter Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* bezeichnet.

Satz 1.3.12. Ein arbitragefreies Marktmodell ist vollständig genau dann, wenn genau ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, d. h. wenn $|\mathcal{P}(P)| = 1$.

Satz 1.3.13. In einem arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt (B, S) errechnet sich der faire Preis p_t^X eines Contingent Claims X_t zur Zeit $t \in \mathbb{N}_0$ aus dem abgezinnten, bedingten Erwartungswert bezüglich des risikoneutralen Maßes \tilde{P} , d. h.

$$p_t^X = \frac{1}{B_t} \mathbb{E}_{\tilde{P}} [B_T X_T | \mathcal{F}_t] \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

1.3.2 Stetige Zeit

Die oben eingeführten Begriffe kann man auch für stetige Zeit definieren. Das Portfolio kann dann zu beliebigen Zeiten umgeschichtet werden. Betrachten wir dazu wieder einen (B, S) -Markt, bestehend aus einem Bankkonto $B = (B_t)_{t \geq 0}$ und endlich vielen Anleihen $S = (S_t)_{t \geq 0} = (S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \geq 0}$. Der zugrundeliegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$.

Definition 1.3.14. Ein linksseitig stetiger, $(d+1)$ -dimensionaler Prozess $\xi = (\beta, \xi^1, \dots, \xi^d)$ mit $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ und $\xi^i = (\xi_t^i)_{t \geq 0}$ heißt **Portfolio** oder **Handelsstrategie** für den (B, S) -Markt und beschreibt die Anteile am Bankkonto und verschiedenen Aktien, die zu den Zeitpunkten $t \geq 0$ gehalten werden.

Definition 1.3.15. Der **Wert des Portfolios** $\xi = (\beta_t, \xi_t)_{t \geq 0}$ ist der stochastische Prozess $V^\xi = (V_t^\xi)_{t \geq 0}$ mit

$$V_t^\xi = \beta_t B_t + \sum_{i=1}^d \xi_t^i S_t^i.$$

Der Wert eines Portfolios setzt sich somit zusammen aus einer risikolosen Anlage und den Anteilen an d risikoreichen Aktien-Anlagen.

Definition 1.3.16. Ein Portfolio $\xi = (\beta_t, \xi_t)_{t \geq 0}$ heißt **selbstfinanzierend**, falls gilt:

$$V_t^\xi = V_0^\xi + \int_0^t \beta_s dB_s + \int_0^t \xi_s dS_s \tag{1.12}$$

bzw. in Differenzialdarstellung:

$$dV_t^\xi = \beta_t dB_t + \xi_t dS_t. \tag{1.13}$$

Allerdings muss hier noch geklärt werden, was unter den vektoriellen stochastischen Integralen in (1.12) und (1.13) zu verstehen ist und welche Annahmen dabei an $S = (S_t)_{t \geq 0}$ gestellt werden müssen. Eine Möglichkeit der Definition ist durch

$$\int_0^t \xi_s \, dS_s := \sum_{i=0}^d \int_0^t \xi_s^i \, dS_s^i$$

gegeben. Für eine ausführliche Diskussion dieses Problems sei auf Shiryaev [Shi99] verwiesen.

Definition 1.3.17. Ein Portfolio ξ heißt **zulässig**, wenn es selbstfinanzierend ist und $V_t^\xi \geq 0$ für $t \geq 0$ gilt.

Definition 1.3.18. Eine selbstfinanzierende Strategie $\xi = (\beta_t, \xi_t)_{t \geq 0}$ bietet für $T > 0$ eine **Arbitrage-Möglichkeit**, falls $V_0^\xi \leq 0$, $V_T^\xi \geq 0$ P -f. s. und $V_T^\xi > 0$ mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit.

Ähnlich zum diskreten Fall im Satz 1.3.7 definieren wir auch für den stetigen Fall äquivalente Martingalmaße.

Definition 1.3.19. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P} heißt **äquivalentes Martingalmaß**, wenn eine Zufallsvariable $Y > 0$ existiert, so dass $\tilde{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y]$ für alle Ereignisse A und $e^{-rt} S_t$ ein Martingal ist bezüglich \tilde{P} .

Auch im stetigen Fall gilt der Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung.

Satz 1.3.20. Ein Markt ermöglicht genau dann kein Arbitrage, wenn mindestens ein äquivalentes Martingalmaß \tilde{P} existiert. Wenn es nur genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt, ist der Markt außerdem vollständig.

Satz 1.3.21. Sei \mathbb{Q} ein äquivalentes Martingalmaß. Dann ist der Preis p_t^X eines Contingent Claims X zur Zeit $t < T$ gegeben durch:

$$p_t^X = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [X | \mathcal{F}_t].$$

Der Preis zur Zeit $t = 0$ ist gegeben durch:

$$p_0^X = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [X].$$

Wir geben jetzt kurz zwei Modelle an, mit denen man Optionspreise in stetiger Zeit bestimmen kann.

Bacheliers Formel

Louis Bachelier war der erste, der die Brownsche Bewegung benutzte, um die Dynamik von Anlagepreisen zu bestimmen (siehe S. 23). Im linearen Bachelier-Modell betrachtet man einen (B, S) -Markt mit konstantem Bankkonto $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$, $B \equiv 1$, $T \geq 0$. Die Anlagen $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ werden als *lineare Brownsche Bewegung mit Drift* modelliert:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.14}$$

wobei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) bezeichnet. In diesem Modell können die Anlagen negative Werte annehmen, was nicht der Realität entspricht. Trotzdem soll es hier kurz erwähnt werden, da es das erste Diffusionsmodell für Aktienpreise ist. Außerdem ist es arbitragefrei und vollständig.

Sei $Z_T = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 T\right)$. Das neue Maß \tilde{P}_T auf (Ω, \mathcal{F}_T) ist definiert als:

$$d\tilde{P}_T = Z_T dP_T,$$

wobei $P_T = P|\mathcal{F}_T$.

\tilde{P}_T ist das einzige zu P_T äquivalente Maß, so dass der Prozess $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein \tilde{P} -Martingal ist. Damit ist \tilde{P}_T das eindeutige Martingalmaß.

Im Bachelier-Modell erhält man eine Formel, um explizit Preise für eine europäische Call-Option zu berechnen.

Satz 1.3.22. (*Bacheliers Formel*)

Der faire Preis $C_T = C(f_T)$ einer europäischen Call-Option mit Auszahlungsfunktion $f_T = (S_T - K)^+$ im Modell (1.14) ist definiert durch

$$C_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

wobei $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ und $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy$.

Insbesondere erhält man für $S_0 = K$:

$$C_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Mit der Put-Call-Parität, die in Abschnitt 1.1.5 erläutert wurde, kann man damit auch die Preise für Put-Optionen berechnen. Wie bereits erwähnt können die Preise S_T in Bacheliers Modell auch negative Werte annehmen. Dieser Nachteil wird im Black-Scholes-Modell behoben.

Das Black-Scholes-Modell

Das Black-Scholes-Modell wurde 1973 von Fischer Black (1938-1995) und Myron Samuel Scholes (*1941) veröffentlicht²⁸. Robert C. Merton (*1944) hat das Modell mit erarbeitet, dann aber separat veröffentlicht²⁹, ebenfalls 1973. Merton und Scholes erhielten 1997 „für ihre neue Methode, Werte von Derivaten zu bestimmen“³⁰ den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Black war zu diesem Zeitpunkt bereits verstorben.

Im Black-Scholes-Modell (B, S) werden die Anlage-Preise $S = (S_t)_{t \geq 0}$ als *geometrische Brownsche Bewegung* (siehe Def. 1.2.13) mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ modelliert:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t},$$

oder als Lösung einer stochastischen Differenzialgleichung:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \tag{1.15}$$

Für das Bankkonto B wird folgende Entwicklung angenommen:

$$dB_t = rB_t dt, \tag{1.16}$$

²⁸F. Black and M. S. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (1973), 637-654.

²⁹R. C. Merton. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1973), 141-183.

³⁰http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/ (Stand: 24. Februar 2009)

also $B_t = B_0 e^{rt}$, wobei $r \geq 0$ den Zinssatz darstellt.

Sei $Z_t := \exp\left(-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t\right)$. Dann hat das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell die Dichte:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z_T = \exp\left(-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right) B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T\right).$$

Satz 1.3.23. *Der faire Preis $C_T = C(f_T)$ einer europäischen Call-Option mit Auszahlungsfunktion $f_T = (S_T - K)^+$ im Modell (1.15) und (1.16) ist definiert durch:*

$$C_T = S_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Insbesondere erhält man für $S_0 = K$ und $r = 0$:

$$C_T = S_0 \left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \right].$$

Für eine europäische Put-Option gilt:

Satz 1.3.24. *Der faire Preis $P_T = P(f_T)$ einer europäischen Put-Option mit Auszahlungsfunktion $f_T = (K - S_T)^+$ im Modell (1.15) und (1.16) ist definiert durch:*

$$P_T = -S_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] + K e^{-rT} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right].$$

Das Black-Scholes-Modell ist heute in der Praxis weit verbreitet. Auch wenn man davon ausgehen kann, dass die nötigen Voraussetzungen in der Realität selten erfüllt sind, bietet der berechnete Preis jedoch eine hilfreiche Näherung.

Für all diese Modelle haben wir einen vollständigen Kapitalmarkt vorausgesetzt, insbesondere sollte der zugrundeliegende Index handelbar sein. Diese wichtige Voraussetzung ist bei Wetterderivaten nicht erfüllt, da die zugrundeliegenden Wetterindizes nicht handelbar sind. Wir befassen uns deshalb im folgenden Abschnitt allgemein mit unvollständigen Finanzmärkten.

1.3.3 Unvollständige Finanzmärkte

In der Realität hat man es meist mit unvollständigen Finanzmärkten zu tun. Die Annahme, ein Investor könne ohne Zahlung von Transaktionskosten handeln und sein Portfolio beliebig oft umschichten, ist nicht sehr realistisch. Außerdem sind Märkte oft reguliert, so dass Investoren nicht beliebig kurz in Aktien investieren können, oder die Märkte sind sehr illiquide, so dass ein Verkäufer keinen Käufer für seine Aktien findet. Der Markt für Wetterderivate ist insbesondere unvollständig, da der zugrundeliegende Basiswert, ein Wetterindex, nicht wie eine Aktie gehandelt werden kann.

Wir beschäftigen uns jetzt mit verschiedenen Möglichkeiten, wie man für einen unvollständigen Markt den Preis eines Claims bestimmen kann.

Äquivalente Martingalmaße

Wir gehen wieder davon aus, dass kein Arbitrage vorliegen soll. Nach Satz 1.3.8 ist die Abwesenheit von Arbitrage äquivalent zur Existenz eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{Q} . Der Preis p_t^X eines Claims X zur Zeit t ist die diskontierte, erwartete Auszahlung bedingt an die Information bis zur Zeit t (Satz 1.3.21). Der Erwartungswert wird hierbei bezüglich des

risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} genommen. Allerdings gibt es viele risikoneutrale Maße \mathbb{Q} , die alle eine arbitragefreie Preisdynamik liefern. Der Preis zur Zeit 0 lässt sich darstellen als:

$$p_0^X = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X].$$

Mit der Berechnung der Erwartung für alle verschiedenen risikoneutralen Maße erhält man ein Intervall von möglichen Preisen $p_0^X \in [m, M]$ mit

$$m = \inf \{ e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] \mid \mathbb{Q} \text{ ist äquivalentes Martingalmaß} \},$$

$$M = \sup \{ e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] \mid \mathbb{Q} \text{ ist äquivalentes Martingalmaß} \}.$$

Meistens ist dieses Intervall sehr groß: Eberlein/Jacod [EJ97] betrachten eine Option mit Ausübungszeitpunkt T , einer konvexen Payoff-Funktion g und konstanter Zinsrate r . Die Preisdynamik wird modelliert als Lévy-Prozess. Dann erhalten sie die Intervallgrenzen $m = e^{-rT} \cdot g(e^{rT}S(0))$ und $M = S(0)$, bzw. für eine Call-Option $m = \max(S(0) - e^{-rT}K, 0)$. Man kann zeigen, dass Preise außerhalb dieses Intervalls Arbitrage ermöglichen. Alle Preise innerhalb des Intervalls sind arbitragefrei.

Sub-/Superhedging

Wenn wir Marktbeschränkungen in unser Modell einführen, beschäftigen wir uns nicht mehr mit äquivalenten Martingalmaßen, sondern erhalten das Intervall von arbitragefreien Preisen $p_0^X \in [m, M]$ aus der unteren und der oberen Grenze von *Sub- und Superhedging-Strategien*.

Eine Superhedging-Strategie ist ein selbstfinanzierendes Portfolio, das aus einer Position in dem Bond und einer zugrundeliegenden Aktie besteht und zur Ausübungszeit *mindestens* den Wert des Claims ausbezahlt. Sei $H_{\text{sub}}(t)$ der Wert des Subhedging-Portfolios eines Claims X zur Zeit t . Dann gilt also $H_{\text{sub}}(T) \geq X$.

Eine Subhedging-Strategie zahlt hingegen *höchstens* den Payoff des Claims aus. Für ein Superhedging-Portfolio $H_{\text{super}}(t)$ gilt folglich $H_{\text{super}}(T) \leq X$.

Der Wert von m ist der Preis der teuersten Subhedging-Strategie, M der Preis der billigsten Superhedging-Strategie, d. h.

$$m = \sup \{ H_{\text{sub}}(0) \mid H_{\text{sub}}(t) \text{ ist ein Subhedging-Portfolio} \},$$

$$M = \inf \{ H_{\text{super}}(0) \mid H_{\text{super}}(t) \text{ ist ein Superhedging-Portfolio} \}.$$

Nutzenindifferenzpreise

Um den Preis p_0 genauer zu bestimmen, kann man Nutzenindifferenzpreise betrachten. Man geht davon aus, dass ein Agent Optionen oder Wetterderivate kauft oder verkauft, wenn die Aktion seinen Nutzen erhöht. Die faire Prämie ist dann der Preis p_0 , der ihn *indifferent* zwischen den beiden Alternativen macht, d. h. er kann sich nicht für eine der beiden Möglichkeiten entscheiden, da beide den gleichen erwarteten Nutzen liefern. Damit werden wir uns in Abschnitt 3.2 genauer beschäftigen. Zunächst führen wir Nutzenfunktionen ein, die einem Konsum oder einem Vermögen einen bestimmten Nutzen zuordnen.

Definition 1.3.25. Eine zweimal differenzierbare Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Nutzenfunktion**, wenn sie monoton wachsend und konkav ist, also:

$$U'(x) \geq 0 \text{ und } U''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die erste Ableitung der Nutzenfunktion wird häufig (besonders in den Wirtschaftswissenschaften) als **Grenznutzen** bezeichnet.

Wir geben jetzt einige spezielle Nutzenfunktionen an.

Definition 1.3.26. Eine Nutzenfunktion vom Typ **HARA** (**H**yperbolic **A**bsolute **R**isk **A**version) ist definiert als:

$$U(y) = \frac{1}{b-1}(a+by)^{1-\frac{1}{b}}, \quad b \neq 0, 1,$$

auf der Menge $\{y : a+by > 0\}$ für gegebene Konstanten a und b .

Definition 1.3.27. Eine **logarithmische** Nutzenfunktion (oder **CRRA**-Nutzenfunktion, **C**onstant **R**elative **R**isk **A**version) ist definiert als:

$$U(y) = \log(a+y) \quad \text{für } a \geq 0.$$

Definition 1.3.28. Eine **exponentielle** Nutzenfunktion ist definiert als:

$$U(y) = -e^{-\frac{y}{a}} \quad \text{mit } a > 0.$$

Die HARA-Nutzenfunktion wird an der Stelle $b = 1$ zu einer logarithmischen Nutzenfunktion $U(y) = \log(a+y)$. Außerdem wird sie zu einer exponentiellen Nutzenfunktion $U(y) = -e^{-\frac{y}{a}}$ für $b = 0$ und $a > 0$.

Esscher-Transformation

Die Esscher³¹-Transformation wird für eindimensionale Verteilungen schon lange in den Versicherungswissenschaften verwendet. In der Finanzmathematik beschreibt sie einen Wechsel des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes durch die Transformation der eindimensionalen Randverteilungen von unendlich-dimensionalen stochastischen Prozessen. Die folgende Darstellung beruht auf der Arbeit von Raible [Rai00].

Definition 1.3.29. Sei $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Eine **Esscher-Transformation** ist ein Maßwechsel von P zu einem äquivalenten Maß \mathbb{Q} mit der Dichte $Z_t = \frac{d\mathbb{Q}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t}$ der folgenden Form:

$$Z_t = \frac{\exp(\theta L_t)}{m(\theta)^t}, \quad (1.17)$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$ und $m(x)$ die momentenerzeugende Funktion von L_1 bezeichnet.

Lemma 1.3.30. Die Gleichung (1.17) definiert einen Dichtenprozess für alle $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{E}[\exp(\theta L_1)] < \infty$. Unter dem neuen Maß \mathbb{Q} ist L wieder ein Lévy-Prozess.

Die Esscher-Transformation ist hilfreich, um ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß zu finden, unter dem die diskontierten Preise Martingale sind.

Der Marktpreis des Risikos

Zur Einführung des Marktpreises des Risikos betrachten wir jetzt, wie man arbitragefreie Preise für eine Call-Option mit Strike K und Ausübungszeit T auf einem unvollständigen Markt bekommt. Wir betrachten hier als Beispiel den Spotmarkt für Strom, da man den Strom-Spotpreis recht gut als geometrische Brownsche Bewegung modellieren kann.

Der Strom-Spotpreis folge also einer geometrischen Brownschen Bewegung,

$$dS_t = \kappa S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

³¹F. Esscher. On the probability function in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal* 15 (1932), 175-195

und die risikolose Investitionsalternative sei ein Bond mit konstanter Auszahlungsrate r ,

$$dB_t = rB_t dt.$$

Der Strommarkt ist unvollständig, weshalb wir nicht einfach das Black-Scholes-Modell verwenden können.

Der Satz von Girsanov liefert Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{Q} , die äquivalent zu P sind und für die ein bestimmter Prozess eine Brownsche Bewegung wird.

Sei $\theta \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Mit $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A M_T]$ für $A \in \mathcal{F}$ und $M_T = \exp(-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T)$ wird \mathbb{Q} ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Außerdem ist der Prozess $W_t^\theta = W_t + \theta t$ eine Brownsche Bewegung bezüglich dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes. Damit erhält man eine Zahl von äquivalenten Martingalmaßen, eines für jede Wahl von θ .

Aus der Theorie der arbitragefreien Preise erhält man für eine Call-Option den Preis:

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)]$$

mit äquivalentem Martingalmaß \mathbb{Q} . Für ein festes θ erhält man ein \mathbb{Q} , das wir mit \mathbb{Q}^θ bezeichnen. Die Dynamik von S_t unter \mathbb{Q}^θ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} dS_t &= \kappa S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= \kappa S_t dt + \sigma S_t (dW_t^\theta - \theta dt) \\ &= (\kappa - \sigma\theta) S_t dt + \sigma S_t dW_t^\theta, \end{aligned}$$

wobei W_t^θ eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathbb{Q}^θ ist. Man erhält für den Preis einer Call-Option auf Strom:

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-rT} e^{(\kappa - \sigma\theta)T} e^{-(\kappa - \sigma\theta)T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-(r - \kappa + \sigma\theta)T} S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

mit $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ und $d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (\kappa - \sigma\theta - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Hier hängt der Preis C_0 von der Wahl des Parameters θ ab, der üblicherweise *Marktpreis des Risikos* genannt wird. Er misst die zusätzlich vom Verkäufer berechnete Prämie für das nicht versicherbare Risiko einer Call-Option auf Strom.

Betrachten wir jetzt das Intervall der arbitragefreien Preise. Wenn $\theta \rightarrow +\infty$, gehen d_1 und d_2 gegen $-\infty$. Damit gehen $\Phi(d_1)$ und $\Phi(d_2)$ gegen 0 und da $\exp(-\sigma\theta T)$ gegen 0 geht, konvergiert auch C_0 gegen 0. Die untere arbitragefreie Grenze ist somit null. Wenn $\theta \rightarrow -\infty$, gehen d_1 und d_2 gegen ∞ , also $\Phi(d_1)$ und $\Phi(d_2)$ gegen 1. Aber $\exp(-\sigma\theta T) \rightarrow \infty$ und damit $C_0 \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir für die Preise von Strom-Calls das Intervall $(0, \infty)$.

Üblicherweise kann man theoretische Forward-Preise herleiten und dann versuchen, das θ zu bestimmen, das am besten zu den beobachteten Preisen passt. Das geeignete θ kann dann verwendet werden, um Preise von Optionen und anderen Derivaten zu bestimmen. Der Marktpreis des Risikos spiegelt wider, wie stark sich der Händler einem Risiko ausgesetzt sieht.

Monte-Carlo-Simulation

Häufig sind die Ergebnisse der Preise von Wetterderivaten nicht in expliziter Form gegeben, so dass eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden muss. Anhand einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung werden Pfade simuliert, mithilfe derer man numerisch ein Ergebnis erhält. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähert sich dieses der tatsächlichen Lösung immer mehr an, je mehr Simulationen man durchführt.

2 Modelle für Wetterprozesse

Eine Möglichkeit, den Preis eines Wetterderivats zu berechnen, besteht darin, zunächst den zugrundeliegenden Wetterindex zu modellieren und dann den Preis anhand der erwarteten Auszahlung zu berechnen (siehe Kapitel 3.1). Wir werden jetzt verschiedene Temperaturmodelle sowie ein Modell für den Niederschlag und zwei Windmodelle vorstellen und grafisch veranschaulichen. Wenn die Quelle einer Grafik nicht angegeben ist, wurde die Grafik mithilfe von MATLAB[®] erstellt.

2.1 Temperaturdaten Berlin-Tempelhof

Zur Motivation sehen wir uns zunächst die Temperaturdaten für Berlin-Tempelhof genauer an. Wie bereits erwähnt (siehe Abschnitt 1.1.4) verwenden wir die historischen Daten der Chicago Mercantile Exchange (CME) und des Deutschen Wetterdienstes (DWD). Der DWD stellt online Daten von 44 deutschen Wetterstationen ab dem 01.01.1991 zur Verfügung, darunter die Tageswerte der Temperatur (Minimum in 5 cm, Minimum/Mittel/Maximum in 2 m über dem Erdboden), der relativen Feuchte, der Windstärke (Mittel und Maximum), der Sonnenscheindauer, des Bedeckungsgrades, der Niederschlagshöhe und des Luftdrucks.

Im Folgenden betrachten wir die tägliche Durchschnittstemperatur (DAT) in Berlin-Tempelhof vom 01.01.1991 bis zum 31.12.2008 (6575 Werte), die nach Definition 1.1.1 als Mittelwert aus Minimum und Maximum (2 m über dem Erdboden) berechnet wird. Bei einigen Untersuchungen wird der 29.02. aus der Messreihe entfernt, um 18 Jahre mit je 365 Tagen zu erhalten. Dann ergeben sich 6570 Werte.

Die tägliche Durchschnittstemperatur weist vier Eigenschaften auf, die sich in einem Temperaturmodell widerspiegeln sollten¹. Wir untersuchen diese anhand der Berliner Daten. Die ersten beiden Bedingungen an ein Temperaturmodell lauten:

1. Das Modell muss einen **Trend** beinhalten (z. B. den Trend der globalen Erwärmung).
2. Es muss die **Saisonalität der Temperatur** erfassen.

In ihren Temperaturmodellen gehen die meisten Autoren von einer deterministischen Komponente aus, bestehend aus einer Geraden, die den zeitabhängigen Trend abbildet, und einer sinusförmigen Kurve bzw. Fourier-Reihe, die die Temperaturschwankungen zwischen Sommer und Winter erfasst. Damit sind die Bedingungen des Trends der globalen Entwicklung (1) und der Saisonalität der Temperatur (2) berücksichtigt. Anhand des Datensatzes für die Temperatur in Berlin erhält man mit linearer Regression² die lineare Funktion:

$$f(t) = 9,5170 + 0,00018 \cdot t,$$

die den Trend beschreibt. Der Trend spielt für die tägliche Temperatur nur eine sehr geringe Rolle, im Datensatz von 18 Jahren führt er aber zu einem Anstieg der Temperatur um fast 1,2 °C.

¹Diese Bedingungen sind u. a. bei Cao/Wei [CW04] zu finden.

²Der MATLAB[®]-Befehl `polyfit(Tage,Temp,1)` errechnet anhand der durchnummerierten Tage (hier 6570) und der dazugehörigen Temperaturdaten `Temp` das geeignete Polynom ersten Grades nach der Methode der kleinsten Quadrate.

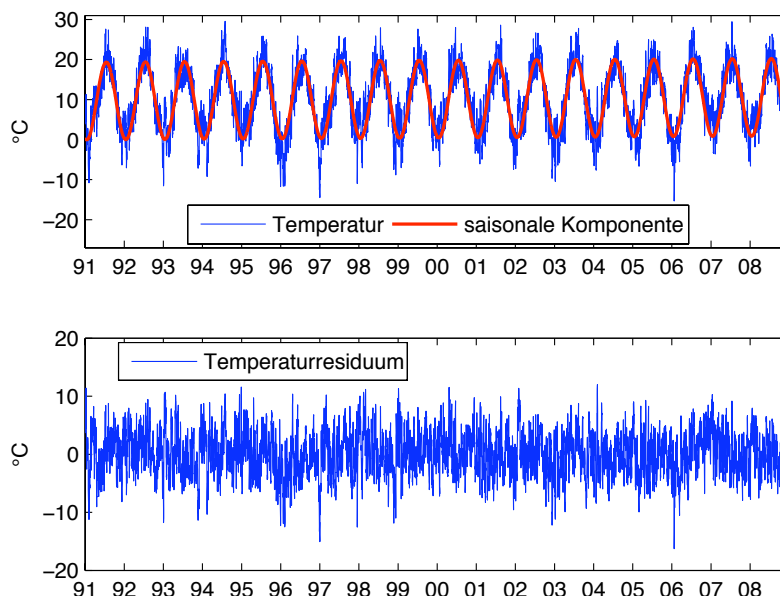


Abbildung 2.1: Oben: Tägliche Durchschnittstemperatur 1991-2008 in Berlin-Tempelhof und die angepasste saisonale Komponente (rot). Unten: Temperaturresiduum nach Entfernen der saisonalen Komponente, Daten: DWD

Die sinusförmige Funktion wird für Berlin folgendermaßen geschätzt³:

$$g(t) = -2,6756 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) - 9,3017 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right).$$

Abbildung 2.1 zeigt die tägliche Durchschnittstemperatur von 1991 bis 2008 in Berlin-Tempelhof sowie die geeignete saisonale Funktion $f(t) + g(t)$. Zieht man die saisonale Funktion von den Messdaten ab, so erhält man das Temperaturresiduum, das ebenfalls in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

Die Temperatur enthält außerdem eine stochastische Komponente. Dabei wird die Frage sein, wie man die Standardabweichung simuliert. Verschiedene Modelle werden sie konstant, stückweise konstant, sinusförmig oder als Fourier-Reihe darstellen. Nach empirischen Untersuchungen gehen die meisten Autoren von folgender Bedingung aus:

3. Die **Saisonalität der Standardabweichung** muss berücksichtigt werden.

Abbildung 2.2 zeigt die empirische tägliche Standardabweichung in Berlin-Tempelhof im Verlauf eines Jahres⁴. Man erkennt, dass die Standardabweichung im Winter im Allgemeinen größer ist als im Sommer. Das deckt sich mit Beobachtungen für andere Städte.

Des Weiteren ist die Temperatur eines Tages abhängig von den Temperaturen der vorherigen Tage. Daraus ergibt sich die vierte Bedingung:

³Der MATLAB®-Befehl `nlinfit(Tage,Temp2,funktion,AW)` errechnet anhand der durchnummerierten Tage (hier 6570) und der dazugehörigen trendbereinigten Temperaturdaten `Temp2` für eine vorgegebene Funktion (hier $\sigma_1 \sin(2t\pi/365) + \sigma_2 \cos(2t\pi/365)$) die geeigneten Parameter σ_1 und σ_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate.

⁴Der MATLAB®-Befehl `std(TempMatrix)` errechnet die empirische Standardabweichung für jeden Tag im Jahr. Dabei ist `TempMatrix` die 18×365 -Matrix der Temperatur an 365 Tagen in 18 Jahren.

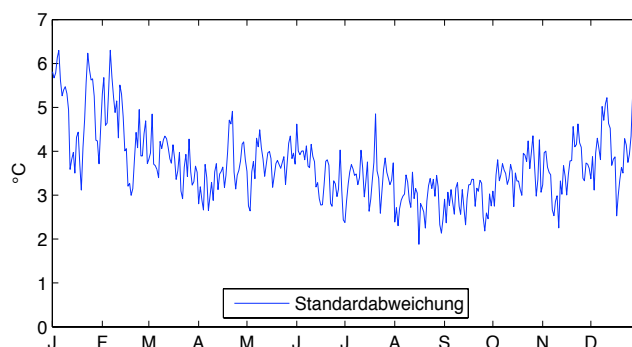


Abbildung 2.2: Empirische tägliche Standardabweichung in Berlin-Tempelhof im Verlauf eines Jahres

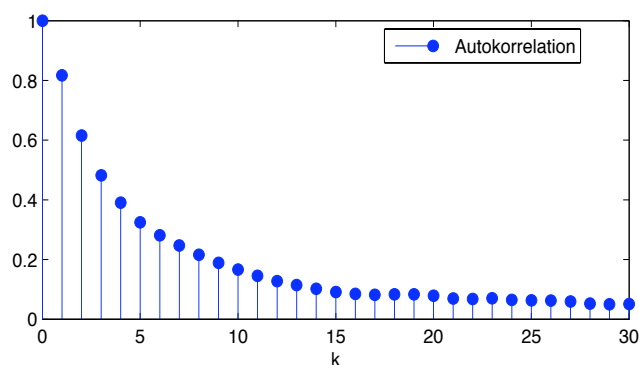


Abbildung 2.3: Empirische Autokorrelation des Temperaturresiduums in Berlin-Tempelhof mit $k = 0, 1, \dots, 30$ Tagen Verzögerung

4. Das Temperaturmodell sollte die **Autoregressions**-Eigenschaft der Temperatur abbilden.

Das bedeutet, dass auf einen warmen Tag eher noch ein warmer als ein kalter Tag folgt und umgekehrt. Dieser Bedingung wird in einigen Modellen durch die Verwendung von AR-Prozessen oder der fraktionalen Brownschen Bewegung entsprochen.

In Abbildung 2.3 sieht man die empirische Autokorrelation des Temperaturresiduums in Berlin in Abhängigkeit der Verzögerung von $k = 0, 1, \dots, 30$ Tagen⁵. Sie berechnet sich folgendermaßen aus der empirischen Varianz und der empirischen Kovarianz:

$$\text{Corr}_{\text{emp}}(k) = \frac{\text{Cov}_{\text{emp}}[U, U^k]}{\text{Var}_{\text{emp}}[U]}$$

mit $U = (U_t)_{t=1, \dots, 6575}$ und $U^k = (U_{t-k})_{t=1, \dots, 6575}$.

Der menschliche Einfluss auf das Wetter

Wir hatten bereits erwähnt, dass es wichtig ist, dass die einem Wetterderivat zugrundeliegenden Wetterdaten von einer unabhängigen Messstation aufgezeichnet werden. Nun stellt sich die Frage, ob es für ein Industrie-Großunternehmen möglich ist, nicht die Messstation, sondern das Wetter direkt zu beeinflussen.

⁵Die empirische Autokorrelation wurde mit dem MATLAB[®]-Befehl `autocorr(residuum, nlags)` berechnet, wobei `residuum` die Zeitreihe der Temperaturresiduen und `nlags` die Zahl der Verzögerungen (hier 30) darstellen.

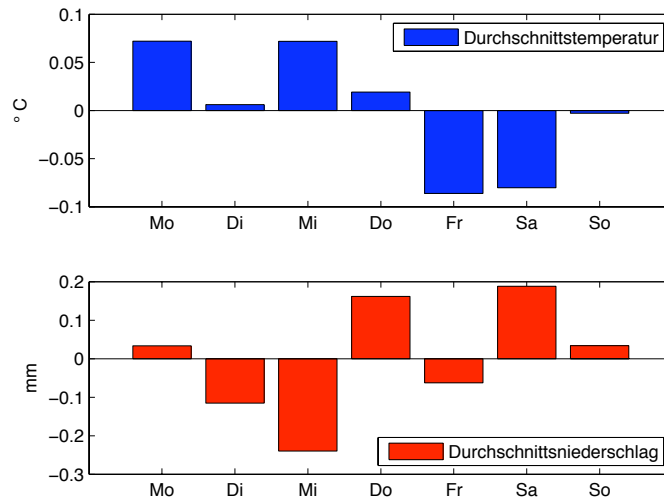


Abbildung 2.4: Abweichung der täglichen Durchschnittstemperatur des DWD und der täglichen Niederschlagsmenge vom Mittelwert ($10,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ bzw. $1,59\text{ mm}$) in Berlin-Tempelhof 1991 bis 2008 in Abhängigkeit des Wochentages

Das Thema des menschlichen Einflusses auf das Wetter wird immer wieder untersucht [BV07, BRV08, Fra08] und diskutiert⁶, insbesondere die Auswirkungen der durch Verkehr und Industrie ausgestoßenen Aerosole (Schwebeteilchen in der Luft). Die Karlsruher Meteorologen Vogel und Bäumer [BV07] stellen anhand der Daten des DWD von zwölf deutschen Wetterstationen von 1991 bis 2005 eine durchschnittliche Differenz zwischen der Mittwochs- und der Samstagstemperatur von $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ und Unterschiede bei Niederschlagsmenge und Sonnenscheindauer an Wochentagen und Wochenenden fest. Sie begründen diese mit dem an Wochenenden verminderten Emissionsausstoß durch Verkehr und Industrie, da kein natürlicher 7-Tage-Rhythmus existiert, der diese Unterschiede erklären könnte. Der Züricher Forscher Franssen [Fra08] hält den beobachteten Effekt für Zufall, zumal bei Untersuchungen für Lugano (Schweiz) der Samstag der sonnigste Tag ist. Abbildung 2.4 zeigt die Mittelwerte der täglichen Durchschnittstemperatur des DWD und der täglichen Niederschlagsmenge in Berlin-Tempelhof 1991-2008 nach Wochentagen. Man erkennt ebenfalls nur sehr geringe Unterschiede zwischen Durchschnittstemperaturen und Niederschlagsmengen an Werktagen und am Wochenende. Diese Werte verdeutlichen, dass der Halter eines Wetterderivats (z. B. ein Industrie-Großunternehmen) keinen relevanten Einfluss auf den Verlauf des Wetterindex nehmen kann.

Wir stellen jetzt verschiedene Möglichkeiten dar, Wetterprozesse zu modellieren. Dafür werden die stochastischen Grundlagen aus Abschnitt 1.2 benötigt. Auch hier unterscheiden wir wieder zwischen Modellen in diskreter und in stetiger Zeit.

2.2 Zeitdiskrete Modelle

Wir werden jetzt die zeitdiskreten Prozesse aus Abschnitt 1.2.1 verwenden, um zeitdiskrete Temperaturmodelle aufzustellen.

⁶ *Immer Samstags kommt der Regen* („die tageszeitung“ vom 21.08.2008), *An Wochenenden ist das Wetter schlechter* („Welt online“ vom 27.08.2007), *Wochenenden kühler und feuchter als Werktage* („Spiegel online“ vom 27.02.2007), *Das miese Wochenende ist ein Mythos* („Süddeutsche Zeitung“ vom 14.03.2008)

2.2.1 Die Temperatur als Markov-Kette

Der erste stochastische Ansatz zur Bestimmung von Preisen von Wetterderivaten stammt von Robert Dischel⁷ aus den Jahren 1998-2001. Es beruht auf dem Hull-White-Modell von 1990⁸, in dem die stochastische Brownsche Bewegung als Rahmen zum Berechnen der Preise von Zinsderivaten benutzt wird [SS07].

Modell

Das D1-Modell von Robert Dischel versucht, aus den Daten der Vergangenheit die Temperaturen der Zukunft vorherzusagen [Dis99a, Dis99b]. Dabei wird die Temperatur als Markov-Kette (siehe Def. 1.2.1) modelliert.

Die durchschnittliche Tagestemperatur $T = \{T_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ löse die folgende Gleichung:

$$T_t = \alpha \Theta_t + \beta T_{t-1} + \gamma \Delta T_{t-1,t}.$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- α und β sind positive reelle Konstanten, so dass $\alpha + \beta = 1$. Sie werden durch einen Optimierungsalgorithmus bestimmt, ebenso γ , das dann nahe bei eins liegt.
- $\Theta_t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, ist ebenfalls konstant und beschreibt die Durchschnittstemperatur des t -ten Tages in einem Durchschnittsjahr. Es errechnet sich als Mittelwert der Temperaturen an diesem Tag in allen verfügbaren Jahren.
- Die Bestimmung des Parameters $\Delta T_{t-1,t} \in \mathbb{R}$ ist im Vergleich zu anderen Modellen etwas ungewöhnlich. Anstatt ihn durch eine geeignete Verteilung anzugeben, wird er zufällig aus dem Vektor der historischen Temperaturdifferenzen dieses Tages bestimmt. ΔT ist eine Matrix mit sämtlichen historischen Temperaturveränderungen für alle 365 Tage des Jahres. Für jeden Tag t erhält man dann einen Vektor mit so vielen Temperaturdifferenzen, wie man Jahre historischer Messdaten zur Verfügung hat. Aus diesen Werten wählt man zufällig mit gleichen Wahrscheinlichkeiten einen Wert $\Delta T_{t-1,t}$ aus.

Die durchschnittliche Temperatur zur Zeit t hängt von einigen Konstanten, einem zufälligen Term sowie der Temperatur des Vortages ab, allerdings nicht von weiter zurückliegenden Temperaturen. Damit ist der Prozess eine Markov-Kette sowie ein AR(1)-Prozess und berücksichtigt die Autoregressions-Eigenschaft der Temperatur. Die Saisonalität der Temperatur wird durch die historische Durchschnittstemperatur des t -ten Tages Θ_t erfasst, die Saisonalität der Standardabweichung durch $\Delta T_{t-1,t}$. Der Trend der globalen Entwicklung wird nicht berücksichtigt.

Obwohl es ein sehr einfaches Modell ist, kann es die Zeitreihen der Tagestemperaturen recht gut darstellen und ist wegen seiner leichten Handhabung bei der Bewertung von Wetterderivaten hilfreich.

2.2.2 Die Temperatur als AR(p)-Prozess

In diesem Abschnitt wird die Temperatur durch die Saisonalität und einen p -verzögerten Autoregressions-Prozess (siehe Def. 1.2.2 und Gleichung (1.8)) modelliert. Die Darstellung basiert auf Artikeln von Melanie Cao⁹ und Jason Wei¹⁰ [CW99, CW00, CW04]. Anhand dieses Modells werden in Abschnitt 3.2.4 die Preise von Wetterderivaten nach dem Gleichgewichtsmodell berechnet.

⁷ *Certified Consulting Meteorologist, Financial Risk Analyst, New York, USA*

⁸ John Hull and Alan White. Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3, No. 4 (1990), 573-592

⁹ *Schulich School of Business, York University, Toronto, Ontario, Kanada*

¹⁰ *Faculty of Management, University of Toronto, Toronto, Ontario, Kanada*

Modell

Die Temperatur $T = \{T_t\}_{t=1,2,\dots,T}$ kann wie folgt modelliert werden:

$$\boxed{T_t = s_t + R_t.} \quad (2.1)$$

Hierbei werden folgende Parameter verwendet:

- $t = 1, 2, \dots, T$, wobei $T = 20 [\text{Jahre}] \cdot 365 [\text{Tage}] = 7300$, da die Autoren einen Temperaturdatensatz von 20 Jahren verwenden. Der 29. Februar in Schaltjahren wird nicht berücksichtigt.
- s_t ist die Saisonalität, also die langjährige tägliche Durchschnittstemperatur. Sie berechnet sich folgendermaßen:

$$s_t = \frac{\beta}{365} \left(t - \frac{T}{2} \right) + \bar{T}_t,$$

wobei $\beta \in \mathbb{R}_+$ den Trend der globalen Erwärmung beschreibt und $\bar{T}_t \in \mathbb{R}$ für die historische Durchschnittstemperatur des Tages t steht. Hier werden die saisonalen Schwankungen der Temperatur also nicht durch eine Sinuskurve modelliert, sondern als Summe eines Trends und der täglichen historischen Durchschnittstemperatur. Wegen des Trends der globalen Erwärmung müssen die Tagestemperaturen der ersten Hälfte der Messperiode – im Durchschnitt – niedriger sein als die historische Durchschnittstemperatur; das Gegenteil ist der Fall für die zweite Hälfte der Messungen.

- Das Temperaturresiduum $\{R_t\}_{t=1,2,\dots,T}$ wird beschrieben durch einen p -verzögerten Autoregressions-Prozess (siehe Def. 1.2.2 und Gleichung (1.8)):

$$\boxed{R_t = \sum_{i=1}^p \rho_i R_{t-i} + \sigma_t \cdot \epsilon_t.} \quad (2.2)$$

Die folgenden Parameter werden verwendet:

- $p \in \mathbb{N}$ beschreibt den Grad der Verzögerung (*lag*) und wird später $p = 3$ bzw. $p = 4$ gesetzt.
- $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, sind die Gewichte der vorherigen Werte, $(R_{1-p}, \dots, R_0) \in \mathbb{R}^p$ geeignete Anfangswerte.
- $\sigma_t = \sigma_0 - \sigma_1 |\sin(\pi t / 365 + \phi)|$ mit $\sigma_0, \sigma_1, \phi \in \mathbb{R}$.
- $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.

Die saisonale Zyklizität ist durch die tägliche historische Durchschnittstemperatur \bar{T}_t erfüllt. β erfasst den Trend der globalen Entwicklung. Das AR-Modell stellt die Autoregressions-Eigenschaft dar. Die Modellierung der Standardabweichung als Sinuskurve spiegelt die Bedingung der Saisonalität der Standardabweichung wider. Damit sind die vier Bedingungen an ein Temperaturmodell erfüllt.

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden die täglichen Temperaturaufzeichnungen vom 01.01.1979 bis zum 31.12.1998 des National Climate Data Center (NCDC) für 5 US-Städte (Atlanta, Chicago, Dallas, New York und Philadelphia).

Es wurden 2 Schätzungen der Parameter durchgeführt, für einen AR(3)- und einen AR(4)-Prozess. Außerdem wurden die Werte für jede Stadt einzeln ermittelt. Wir geben hier nur die Werte der Schätzung als AR(3)-Prozess für New York an:

Autoregression			Standardabweichung σ_t		
ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_0	σ_1	ϕ
0,7558	-0,2631	0,0463	6,5372	2,7035	-0,2432

Abbildung 2.5 zeigt die empirische Standardabweichung im Verlauf eines Jahres in Atlanta und Chicago sowie die mit den geschätzten Parametern für Atlanta, Chicago und New York modellierten Standardabweichungen. In Abbildung 2.6 wird das Temperaturresiduum in New York über 5 Jahre als AR(3)-Prozess simuliert.

2.2.3 Die Temperatur als ARMA-Modell

Dieses Modell basiert auf Roustant/Laurent¹¹/Bay/Carraro¹² [RLBC03]. Sie verwenden ein Autoregression-Moving-Average-Modell (siehe Def. 1.2.2), das die wichtigsten Eigenschaften der Temperatur widerspiegelt: Die Saisonalität der Werte und der Standardabweichung, schnelle Rückkehr zum Mittelwert sowie die Korrelation zwischen der Temperatur vergangener Tage und der heutigen.

Bei der Schätzung setzen die Autoren den Moving-Average-Parameter gleich null, so dass sich ein AR-Prozess ergibt.

Modell

Die Autoren stellen folgendes Modell für die tägliche Durchschnittstemperatur $T = \{T_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ auf:

$$T_t = m_t + s_t + \sigma_t Z_t.$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- $m_t, t \in \mathbb{N}$, stellt mit $d, e \in \mathbb{R}$ den linearen Trend dar:

$$m_t = d \cdot t + e.$$

- $s_t, t \in \mathbb{N}$, ist die saisonale Komponente, modelliert als Fourier-Reihe der Ordnung $N_f \in \mathbb{N}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N_f$. Später ist $N_f = 2$, was die Autoren damit begründen, dass die Kurve der Durchschnittstemperatur in Paris asymmetrisch ist. Die Saisonalität ist gegeben durch:

$$s_t = \sum_{i=1}^{N_f} \left(a_i \cdot \cos\left(\frac{2\pi i t}{365}\right) + b_i \cdot \sin\left(\frac{2\pi i t}{365}\right) \right).$$

- σ_t ist ein deterministischer, periodischer Prozess mit Periode 1 Jahr, der die Standardabweichung von T_t darstellt. Es wird $\sigma_t > 0$ angenommen, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Es ist:

$$\sigma_t = a + b \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right).$$

- Z_t ist ein $ARMA(p, q)$ -Prozess mit Varianz 1 und $p, q \in \mathbb{N}$. Später werden $p = 3$ und $q = 0$ gewählt, so dass der Moving-Average-Teil wegfällt. Z_t ist gegeben durch:

$$Z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot Z_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}$$

mit $\phi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p, \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q$ und geeigneten Anfangswerten $(Z_{1-p}, \dots, Z_0) \in \mathbb{R}^p$. $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ist eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.

¹¹beide *Institut de Science Financière et d'Assurances, Université Claude Bernard, Lyon, Frankreich*

¹²beide *Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, Saint-Etienne, Frankreich*

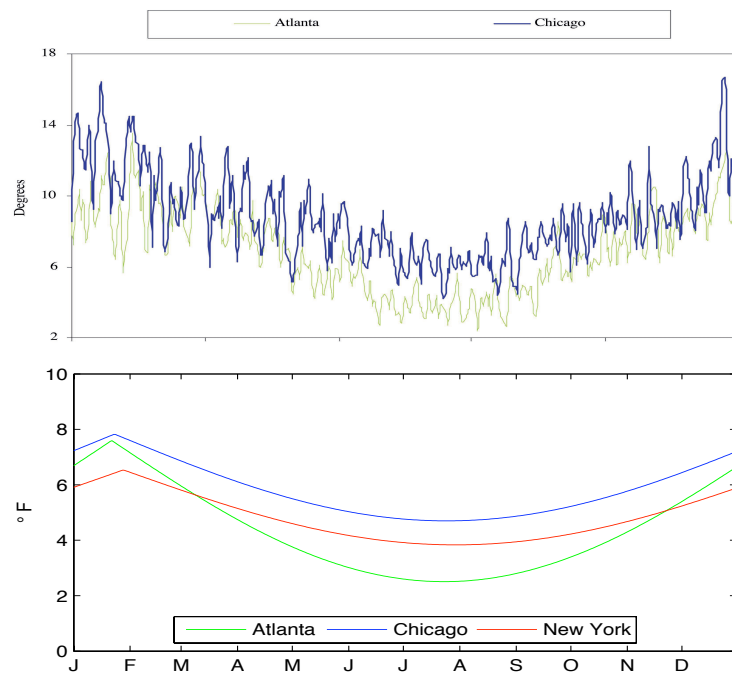


Abbildung 2.5: Empirische Standardabweichung der Temperatur von Januar bis Dezember in Atlanta und Chicago, berechnet für den Zeitraum 01.01.1979 bis 31.12.1998, Quelle: [CW04], sowie die modellierten Standardabweichungen für Atlanta, Chicago und New York, alle Angaben in Grad Fahrenheit

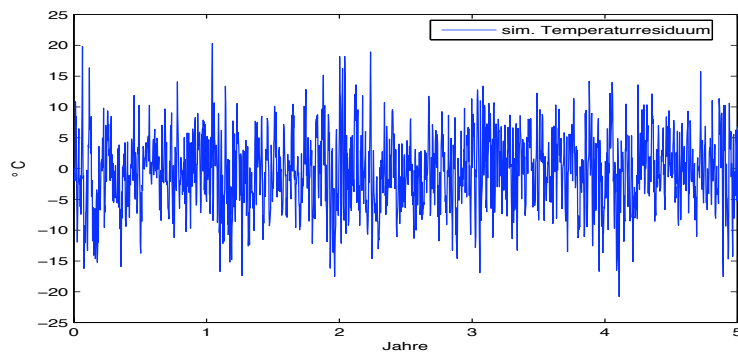


Abbildung 2.6: Simuliertes Temperaturresiduum in New York als AR(3)-Prozess über 5 Jahre

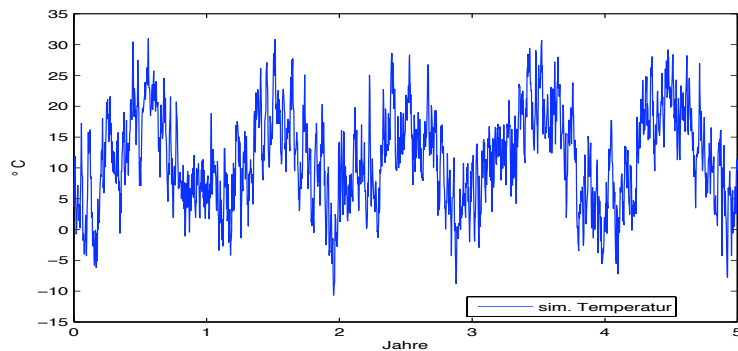


Abbildung 2.7: Simulierte Temperatur in Paris-Montsouris über 5 Jahre als ARMA(3,0)-Prozess

Damit erfasst das Modell die Eigenschaften der Temperatur, einen Trend, Saisonalität (der Temperatur und der Standardabweichung) sowie Autoregression zu beinhalten.

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden tägliche Durchschnittstemperaturen vom 01.01.1979 bis zum 31.12.1999 in Paris-Montsouris, gemessen von Météo France. Der 29. Februar wird nicht berücksichtigt, weshalb man eine Messreihe von 7665 Daten erhält.

Im ARMA(p, q)-Prozess werden $p = 3$ und $q = 0$ gewählt, d. h. der Moving-Average-Teil fällt weg und man erhält einen AR(3)-Prozess. Dann ergeben sich folgende Schätzwerte:

Trend m_t		Saisonalität s_t				Standardabweichung σ_t			Autoregression		
d	e	a_1	b_1	a_2	b_2	a	b	c	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0,000185	12,1	-7,39	-2,67	-0,14	0,74	3,35	0,11	0,15	0,92	-0,19	0,06

Mit diesen Parametern wird in Abbildung 2.7 die Temperatur in Paris-Montsouris als ARMA(3,0)-Prozess über 5 Jahre simuliert.

2.2.4 Die Temperatur als AR-GARCH-Prozess

Campbell¹³/Diebold¹⁴ [CD05a] modellieren die Temperatur als AR-GARCH-Prozess, also als Kombination eines AR-Prozesses (siehe Def. 1.2.2 und Gleichung (1.8)) und eines GARCH-Prozesses (siehe Def. 1.2.4). Die autoregressiven Verzögerungen bilden die Zyklizität (d. h. beständige Dynamiken mit stationärer Kovarianz) der Temperatur jenseits von Saisonalität und Trend ab, die GARCH-Komponente erfasst die zyklische Komponente der Standardabweichung.

Modell

Die tägliche Durchschnittstemperatur $T = \{T_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ist durch das folgende Modell gegeben:

$$T_t = \text{Trend}_t + \text{Saisonal}_t + \sum_{l=1}^L \rho_{t-l} T_{t-l} + \sigma_t \epsilon_t.$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- Der Trend wird durch ein deterministisches Polynom der Ordnung $M \in \mathbb{N}$ und mit $\beta_m \in \mathbb{R}$, $m = 0, \dots, M$, beschrieben. Später wird $M = 1$ gewählt, so dass man einen linearen Trend erhält. Allgemein ist der Trend gegeben durch:

$$\text{Trend}_t = \sum_{m=0}^M \beta_m t^m.$$

- Die saisonale Komponente wird als Fourier-Reihe der Ordnung $P \in \mathbb{N}$ mit $a_p, b_p \in \mathbb{R}$, $p = 1, \dots, P$, modelliert. Später wird $P = 3$ gesetzt¹⁵. Die saisonale Komponente ist gegeben durch:

$$\text{Saisonal}_t = \sum_{p=1}^P \left[a_p \cos\left(\frac{2\pi p t}{365}\right) + b_p \sin\left(\frac{2\pi p t}{365}\right) \right].$$

¹³Department of Economics, Brown University, Providence, Rhode Island, USA

¹⁴Department of Economics, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, USA

¹⁵Die Autoren begründen diese Wahl nicht und geben auch keine geschätzten Parameter an. Damit bleibt unklar, warum die Saisonalität neben der jährlichen auch noch halb- und vierteljährliche Perioden aufweisen soll.

- Die Autoregression der Ordnung $L \in \mathbb{N}$ wird durch

$$\sum_{l=1}^L \rho_{t-l} T_{t-l}$$

mit $\rho_{t-l} \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, L$, und geeigneten Anfangswerten $(T_{1-L}, \dots, T_0) \in \mathbb{R}^L$ beschrieben. Später wird $L = 25$ gesetzt, so dass man einen AR(25)-Prozess erhält.

- $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ist eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.
- Das Quadrat der Standardabweichung σ_t^2 wird durch eine Fourier-Reihe der Ordnung $Q \in \mathbb{N}$ mit $c_q, d_q \in \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, Q$, und einen GARCH(R, S)-Prozess mit $R, S \in \mathbb{N}$ und $\alpha_r, \beta_s \in \mathbb{R}$, $r = 1, \dots, R$, $s = 1, \dots, S$, angenähert. Später sind $Q = 3$, $R = S = 1$, so dass man eine Fourier-Reihe 3. Ordnung und einen GARCH(1,1)-Prozess erhält. Man beachte, dass die Varianz σ_t^2 im Gegensatz zu vorherigen Modellen auch eine stochastische Komponente enthält. Sie ist gegeben durch:

$$\sigma_t^2 = \sum_{q=1}^Q \left[c_q \cos\left(\frac{2\pi qt}{365}\right) + d_q \sin\left(\frac{2\pi qt}{365}\right) \right] + \sum_{r=1}^R \alpha_r (\sigma_{t-r} \epsilon_{t-r})^2 + \sum_{s=1}^S \beta_s \sigma_{t-s}^2.$$

Dieses Modell erfüllt ebenfalls die zu Beginn des Kapitels angegebenen Anforderungen an ein Temperaturmodell.

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden Messungen der täglichen Durchschnittstemperatur von EarthSatellite vom 01.01.1960 bis zum 11.05.2001 für die Städte Atlanta, Chicago, Las Vegas und Philadelphia. Das führt zu 15285 Werten pro Stadt. Die geschätzten Werte werden jedoch nicht explizit angegeben.

Weitere Anwendung des AR-GARCH-Modells

Taylor¹⁶/Buizza¹⁷ haben in ihren Arbeiten [TB04, TB06] das oben beschriebene AR-GARCH-Modell von Campbell/Diebold verwendet und noch einen Saisonalitäts-Term im GARCH-Teil der Varianz hinzugefügt. Sie wenden das Modell auf Temperaturen in fünf britischen Städten an.

Modell

Im Modell wird mehrfach eine Funktion $s(\cdot, t)$ für $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^5$ verwendet. Allgemein ist sie für $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ gegeben durch:

$$s(\boldsymbol{\lambda}, t) := \lambda_0 + \lambda_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \lambda_3 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + \lambda_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right). \quad (2.3)$$

Die tägliche Durchschnittstemperatur $T = \{T_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ wird folgendermaßen modelliert:

$$\boxed{T_t = s(\boldsymbol{\mu}, t) + \varphi T_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t}, \quad (2.4)$$

¹⁶Saïd Business School, University of Oxford, Oxford, UK

¹⁷European Centre for Medium-range Weather Forecasts, Reading, UK

Außerdem gilt:

- Die Saisonalität $s(\boldsymbol{\mu}, t)$ wird modelliert als Fourier-Reihe 2. Ordnung mit $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}^5$. Nach Schätzung der Parameter μ_3 und μ_4 erkennt man, dass der Einfluss von halbjährlich periodischen Termen sehr gering ist.
- φT_{t-1} ist ein AR(1)-Prozess mit Gewichtung $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Die Varianz wird modelliert als Summe einer Fourier-Reihe 2. Ordnung und eines GARCH-Prozesses, der im Unterschied zum Modell von Campbell/Diebold noch einen Saisonalitätsterm $s(\boldsymbol{\gamma}, t)$ enthält:

$$\sigma_t^2 = s(\boldsymbol{\omega}, t) + \alpha(\sigma_{t-1}\epsilon_{t-1} - s(\boldsymbol{\gamma}, t))^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

mit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \mathbb{R}^5$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in \mathbb{R}^5$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.

Dieses Modell beinhaltet keinen Trend der globalen Entwicklung. Die übrigen Bedingungen an ein Temperaturmodell sind erfüllt.

Schätzung der Parameter

Es liegen tägliche Temperaturmessungen vom 1. Januar 1994 bis zum 1. Juli 2000 an fünf Orten in Großbritannien vor: Birmingham, Bristol, London-Heathrow, Leeds und Manchester. Die ersten fünf Jahre der Zeitreihen werden verwendet, um das AR-GARCH-Modell zu identifizieren und mit der Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen. Später werden die verbleibenden 18 Monate zum Vergleich mit den Vorhersagen herangezogen.

Die Autoren schätzen die Parameter für alle fünf Städte. Wir geben nur die Parameter für London-Heathrow an¹⁸:

Saisonalität $s(\boldsymbol{\mu}, t)$				AR	Varianz σ_t^2				
μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	φ	ω_0	α	β	γ_0	γ_2
3,61	-0,75	-1,87	0,26	0,72	1,40	0,08	0,50	-0,40	3,37

Abbildung 2.8 zeigt die tägliche Temperatur in London-Heathrow vom 01.01.1994 bis zum 30.06.2000 und im Vergleich eine Temperatursimulation anhand der Parameter für London-Heathrow sowie die dazugehörige simulierte Varianz, die ebenfalls eine stochastische Komponente besitzt.

2.2.5 Die Windgeschwindigkeit als AR-GARCH-Prozess

Taylor/McSharry¹⁹/Buizza [TMB08] verwenden ein ähnliches AR-GARCH-Modell wie Taylor/Buizza in Abschnitt 2.2.4, um die Mittags-Windgeschwindigkeit zu modellieren. Sie verwenden dafür die Daten von fünf Windparks in Großbritannien, deren erzeugte Strommenge von der Windgeschwindigkeit abhängt.

¹⁸Die nicht angegebenen Parameter von $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ sind 0.

¹⁹Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford, UK

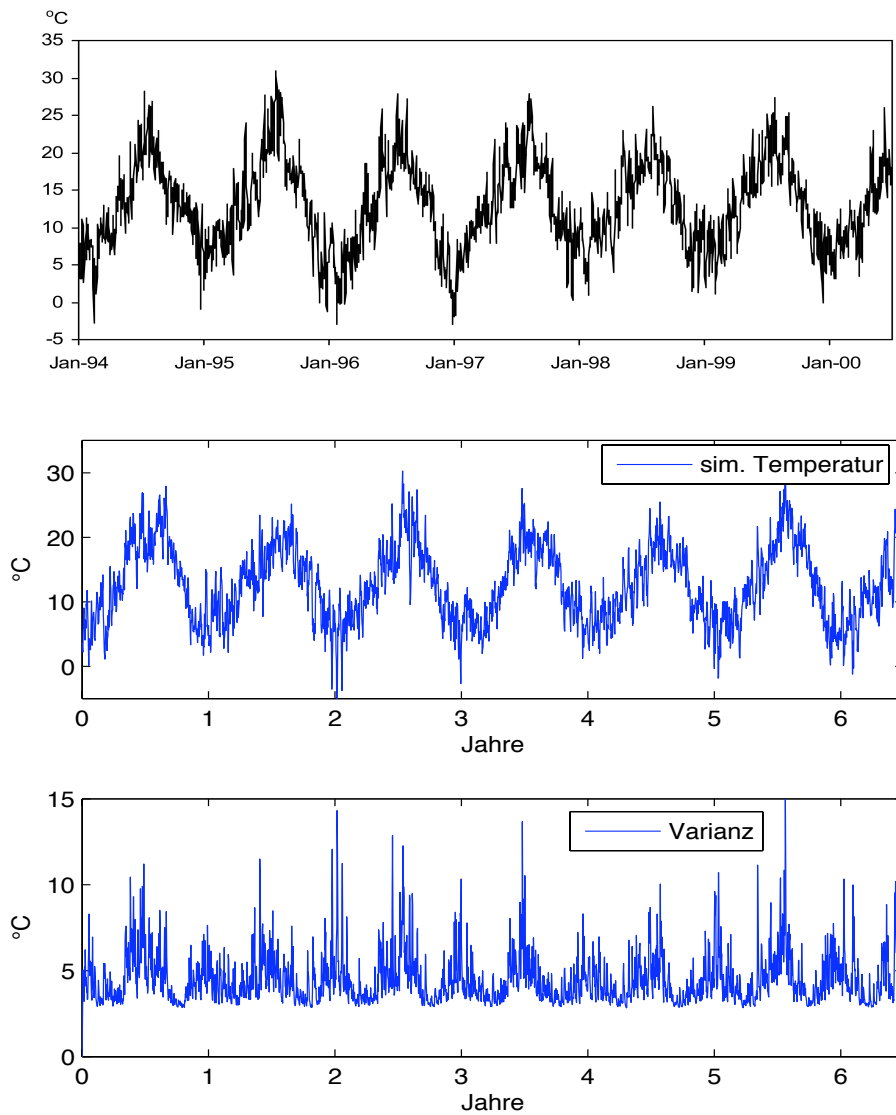


Abbildung 2.8: Oben: Tägliche Mittagstemperatur in Heathrow, Quelle: [TB04]. Mitte: eine Simulation der Temperatur über 6,5 Jahre auf Basis der geschätzten Parameter für Heathrow im AR-GARCH-Modell von Taylor/Buizza. Unten: die dazugehörige simulierte Varianz

Modell

Die Quadratwurzel der Windgeschwindigkeit $\sqrt{V_t} = Y_t$, $t \in \mathbb{N}$, wird wie folgt modelliert:

$$Y_t = s_t + \sum_{i=1}^7 \phi_i Y_{t-i} + \sigma_t \epsilon_t.$$

Folgende Parameter werden dabei verwendet:

- Wie schon in den Temperaturmodellen zeigt sich auch bei der Windgeschwindigkeit eine Saisonalität s_t . Sie wird modelliert als Fourier-Reihe 2. Ordnung:

$$s_t = \mu_0 + \mu_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \mu_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \mu_3 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + \mu_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

mit geeigneten Konstanten $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}^5$, wobei später die Parameter $\mu_3, \mu_4 = 0$ geschätzt werden.

- Das autoregressive Verhalten der Windgeschwindigkeit wird durch den AR(7)-Prozess $\sum_{i=1}^7 \phi_i Y_{t-i}$ mit geeigneten Konstanten $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7) \in \mathbb{R}^7$ und den Anfangswerten $(Y_{-6}, Y_{-5}, Y_{-4}, Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-1}, Y_0) \in \mathbb{R}_+^7$ beschrieben.
- Die Varianz σ_t^2 der Windgeschwindigkeit weist im Gegensatz zum AR-GARCH-Temperaturmodell aus Abschnitt 2.2.4 keine Saisonalität auf und wird als GARCH(1,1)-Prozess modelliert:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\sigma_{t-1}\epsilon_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

mit geeigneten Konstanten $\omega, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und einem Anfangswert $\sigma_0 \in \mathbb{R}$.

- $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden die Daten der Mittags-Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe vom 01.01.1995 bis zum 30.06.2004, die an fünf britischen Windparks²⁰ gemessen wurden. Wir geben hier nur die geschätzten Parameter für Bears Down (Cornwall) an, anhand derer in Abbildung 2.9 die Windgeschwindigkeit über 9,5 Jahre als AR-GARCH-Prozess simuliert wurde:

Saisonalität s_t			AR	Varianz σ_t^2		
μ_0	μ_1	μ_2	ϕ_1	ω	α	β
1,58	0,03	0,10	0,38	0,0050	0,04	0,94

Im Vergleich dazu ist in Abbildung 2.9 auch die tägliche Mittags-Windgeschwindigkeit in Bears Down (Cornwall) vom 01.01.1995 bis zum 30.06.2004 zu sehen.

2.2.6 Die Temperatur als Fourier-Transformierte-Modell

Svec/Stevenson²¹ [SS07] schlagen zwei Modelle vor, die ebenfalls auf Variationen des Modells von Campbell/Diebold (Kapitel 2.2.4) basieren.

²⁰Blood Hill (Norfolk), Llyn Alaw (Anglesey), Bears Down (Cornwall), Bu Farm (Okney), Cemmaes (Powys)

²¹beide *School of Business, The University of Sydney, NSW, Australia*

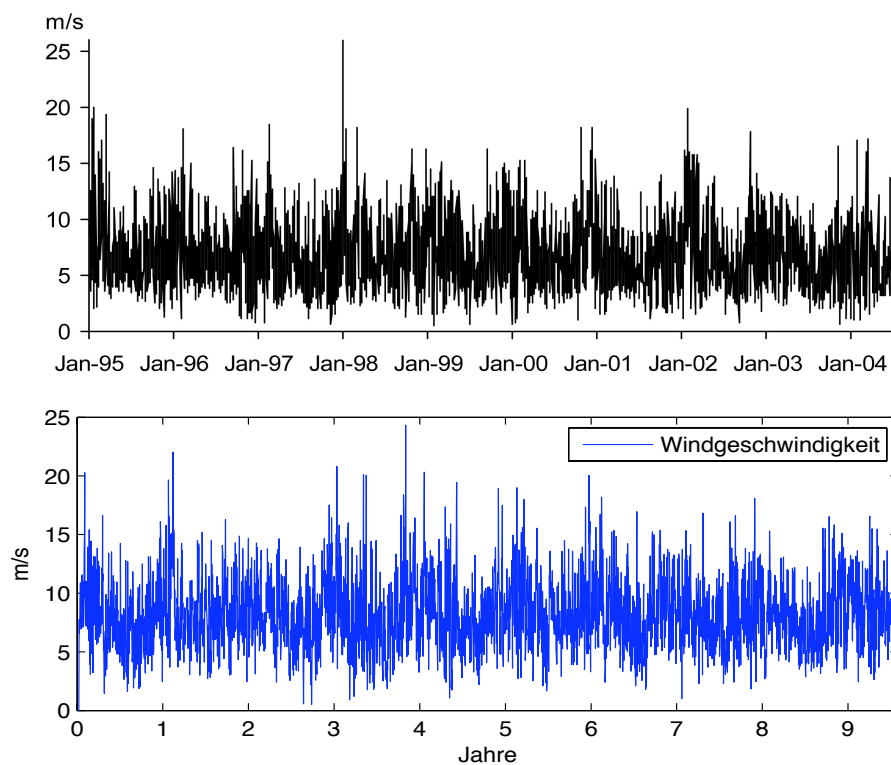


Abbildung 2.9: Oben: Tägliche Mittags-Windgeschwindigkeit in Bears Down (Cornwall) vom 01.01.1995 bis zum 30.06.2004, Quelle: [TMB08]. Unten: eine Simulation der Windgeschwindigkeit über 9,5 Jahre auf Basis der geschätzten Parameter für Bears Down im AR-GARCH-Modell von Taylor/McSharry/Buizza.

Modell 1

Das erste Modell basiert auf einer Intraday-Temperatur-Zeitreihe, d. h. mehreren Temperaturmessungen pro Tag, nämlich 48 halbstündigen Beobachtungen pro Tag. Die Intraday-Temperatur wird durch zwei periodische Funktionen angenähert, S_t und D_t , die die saisonale und die tägliche Periodizität darstellen. Beide werden als Fourier-Reihen modelliert.

Es ist hierbei wichtig anzumerken, dass T_t die *simulierte Temperatur zur Zeit t* und nicht wie sonst die tägliche Durchschnittstemperatur darstellt. Die Zeitpunkte $t = 0, \frac{1}{48}, \frac{2}{48}, \dots = \{\frac{k}{48}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ stellen also die halbstündigen Zeitpunkte dar, so dass erst nach 48 Schritten der nächste Tag erreicht ist. Zur Berechnung der täglichen Durchschnittstemperatur T_t^{DAT} kommen wir später. Die Temperatur T_t folge zu halbstündigen Zeitpunkten $t = \{\frac{k}{48}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ folgender Gleichung:

$$\boxed{T_t = \beta_0 + \beta_1 t + S_t + D_t + C_t + \sigma \epsilon_t.} \quad (2.5)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ sind Konstanten, die den linearen Trend darstellen.
- S_t ist die saisonale Komponente der Temperatur, modelliert als Fourier-Reihe 8. Ordnung, sie wiederholt sich alle 4 Jahre ($4 \cdot 365,25 = 1461$ Tage, die Periode ist 1461). Die 4-Jahres-Betrachtung wird bevorzugt, da sie den zusätzlichen Tag im Schaltjahr berücksichtigt. $A_i \in \mathbb{R}$ und $B_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 8$, sind Konstanten. Die Saisonalität wird beschrieben durch:

$$S_t = \sum_{i=1}^8 \left(A_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{1461}\right) + B_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{1461}\right) \right).$$

- D_t ist die tägliche Komponente der Temperatur, modelliert als Fourier-Reihe 2. Ordnung, sie wiederholt sich jeden Tag (die Periode ist eins). $\Gamma_j \in \mathbb{R}$ und $\Delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, sind Konstanten. Die tägliche Komponente ist gegeben durch:

$$D_t = \sum_{j=1}^2 \left(\Gamma_j \cos(2\pi j t) + \Delta_j \sin(2\pi j t) \right).$$

- C_t führt als AR(L)-Prozess mit $L \in \mathbb{N}$ zu autoregressivem Verhalten, $(\rho_{t-L}, \dots, \rho_{t-1}) \in \mathbb{R}^L$:

$$C_t = \sum_{l=1}^L \rho_{t-l} T_{t-l}.$$

- Es ist $\sigma = 1$ und $\{\epsilon_t\}_{t=\{\frac{k}{48}\}_{k \in \mathbb{N}_0}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen.

Die Saisonalität der Standardabweichung wird nicht erfasst, da $\sigma = 1$ gewählt wird. Die übrigen Bedingungen an ein Temperaturmodell sind erfüllt.

Schätzung der Parameter

Die Daten stammen von Integral Energy, einem Energieversorger in New South Wales, Australien, und bestehen aus 48 halbstündig gemessenen Temperaturen pro Tag vom 1. März 1997 bis zum 30. April 2005, gemessen am Bankstown Airport, Sydney. Die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben die folgenden Werte der Parameter:

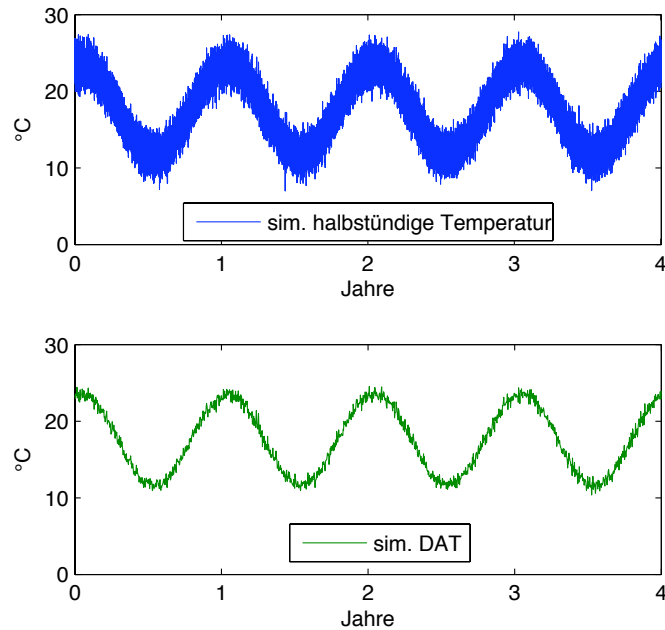


Abbildung 2.10: Oben: Simulation der halbstündigen Temperaturen aus dem Fourier-Transformierte-Modell über 4 Jahre (70128 Werte). Unten: die daraus errechnete tägliche Durchschnittstemperatur

Trend	tägliche Komponente D_t				saisonale Komponente S_t				AR	
β_0	Γ_1	Δ_1	Γ_2	Δ_2	A_4	B_4	A_8	B_8	ρ_{t-1}	ρ_{t-2}
0,443	-0,239	0,170	0,066	-0,145	0,147	0,037	-0,013	0,006	1,013	0,068

Anhand dieser Daten wurde in Abbildung 2.10 die halbstündige Temperatur über 4 Jahre simuliert und daraus die tägliche Durchschnittstemperatur berechnet.

Modell 2

Das zweite Modell basiert auf einer Zeitreihe der Tagestemperaturen. Im Unterschied zum ersten Modell in Gleichung (2.5) verwendet es nur eine Temperaturbeobachtung pro Tag. Das Modell beinhaltet Trend, Zyklus und eine saisonale Komponente und wiederholt sich nach 1461 Schritten ($4 \cdot 365,25$), was den Daten von 4 Jahren entspricht. $A_i, B_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8$ und $(\rho_{t-L}, \dots, \rho_{t-1}) \in \mathbb{R}^L, L \in \mathbb{N}$, sind Konstanten. Hier stellt T_t eine simulierte Temperatur am Tag $t \in \mathbb{N}$ dar, aber nicht unbedingt die tägliche Durchschnittstemperatur. Zu deren Berechnung kommen wir im Anschluss.

Die tägliche Temperatur T_t genüge für $t \in \mathbb{N}$ der folgenden Gleichung:

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{i=1}^8 \left(A_i \cos \left(\frac{2\pi i t}{1461} \right) + B_i \sin \left(\frac{2\pi i t}{1461} \right) \right) + \sum_{l=1}^L \rho_{t-l} T_{t-l} + \epsilon_t. \quad (2.6)$$

Auch das zweite Modell erfüllt nicht die Bedingung der Saisonalität der Standardabweichung.

Schätzung der Parameter

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert anhand des Datensatzes aus Modell 1 die folgenden Schätzwerte:

Trend	Saisonalität		AR
β_0	A_4	B_4	ρ_{t-1}
7,036	2,278	0,644	0,600

Tägliche Durchschnittstemperatur

Beide Modelle sagen nicht direkt die tägliche Durchschnittstemperatur vorher, die man aber benötigt, um die HDDs und die CDDs zu prognostizieren.

Im Intraday-Modell (2.5) erhält man 48 Temperaturen pro Tag. Dann bildet man den Mittelwert der minimalen und der maximalen Temperatur und erhält die tägliche Durchschnittstemperatur T_t^{DAT} , $t \in \mathbb{N}$, die in Abbildung 2.10 dargestellt ist.

Im täglichen Modell (2.6) erhält man die tägliche Durchschnittstemperatur T_t^{DAT} , $t \in \mathbb{N}$, durch wiederholte Simulation der Temperatur und anschließender Berechnung des Mittelwerts der Minimal- und der Maximaltemperaturen.

Beide Modelle sind im Vergleich zu den vorherigen sehr aufwändig, da man die benötigte DAT nicht direkt simuliert.

2.3 Zeitstetige Modelle

Nun werden wir Modelle für Wetterprozesse vorstellen, die auf den zeitstetigen Prozessen aus Abschnitt 1.2.2 basieren. Für die Simulation werden die stetigen Modelle meist durch Zeitreihen angenähert.

2.3.1 Die Temperatur als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Es folgen zwei Temperaturmodelle, die einen von einer Brownschen Bewegung angetriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (siehe Def. 1.2.14) verwenden. Sie unterscheiden sich in der Modellierung der Varianz.

I. Stückweise konstante Varianz

Alaton²²/Djehiche²³/Stillberger²⁴ [ADS02] schlagen ein Ornstein-Uhlenbeck-Modell vor, in dem die Varianz innerhalb eines Monats konstant bleibt. Anhand dieses Modells werden in Abschnitt 3.1.1 die Preise von Wetterderivaten berechnet.

Modell

Die Temperatur T_t zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$ ist gegeben als Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung:

$$\boxed{dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dW_t.} \quad (2.7)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

²²Algorithmica Research AB, Stockholm, Schweden

²³Department of Mathematics, Stockholm, Schweden

²⁴Third Swedish National Pension Fund, Stockholm, Schweden

- s_t stellt die (langfristige) Durchschnittstemperatur zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$ dar, also die deterministische, saisonale Komponente:

$$s_t = A + Bt + C \sin(\omega t + \phi), \quad (2.8)$$

wobei $A, B, C, \phi \in \mathbb{R}$.

- $\kappa \in \mathbb{R}$ gibt die Geschwindigkeit der Mean-Reversion an, also der Tendenz, zum Mittelwert zurückzukehren.
- Die Standardabweichung σ_t wird stückweise konstant modelliert, d. h.

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1 & \text{im Januar,} \\ \sigma_2 & \text{im Februar,} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_{12} & \text{im Dezember,} \end{cases}$$

mit $\sigma_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, 12$.

- W ist eine Standard-Brownsche Bewegung.

Dieses Modell erfüllt die vier Bedingungen an ein Temperaturmodell vom Beginn des Kapitels. Ein Ornstein-Uhlenbeck ist ein stetiger AR(1)-Prozess (siehe Def. 1.2.24). Mit dem Anfangswert $T_0 \in \mathbb{R}$ ist die Lösung von Gleichung (2.7) gegeben durch:

$$T_t = s_t + (T_0 - s_0)e^{-\kappa t} + \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} \sigma_u dW_u. \quad (2.9)$$

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden die tägliche Durchschnittstemperatur am Bromma Airport, einem Flughafen von Stockholm, aus „den letzten 40 Jahren“ (der Artikel wurde 2002 veröffentlicht). Für die saisonale Komponente (2.8) ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate folgende Schätzung:

$$s_t = 5,97 + 0,0000657 \cdot t + 10,4 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} - 2,01\right).$$

Die Amplitude der Sinusfunktion ist ungefähr 10°C , d. h. der Unterschied zwischen einem typischen Winter- und einem typischen Sommertag ist ungefähr 20°C . Der Trend ist offensichtlich sehr klein, aber über einen Zeitraum von 40 Jahren erhöht er die Temperatur um ungefähr 1°C . Die Schätzungen ergeben folgende Werte für die monatliche Standardabweichung (siehe Abbildung 2.11):

Standardabweichung σ_t											
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}
3,41	2,97	2,29	1,98	2,00	1,96	1,69	1,60	1,85	2,38	2,62	3,30

Für den Mean-Reversion-Parameter erhält man $\kappa = 0,237$.

Anhand dieser Werte wurde die Temperatur über 5 Jahre in Abbildung 2.12 simuliert. Dabei wurde der Prozess für die Simulation als Zeitreihe mit $i \in \mathbb{N}_0$ und einer Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ angenähert:

$$T_{i+1} = s_{i+1} + \kappa(T_i - s_i) + \sigma_{i+1}\epsilon_{i+1}.$$

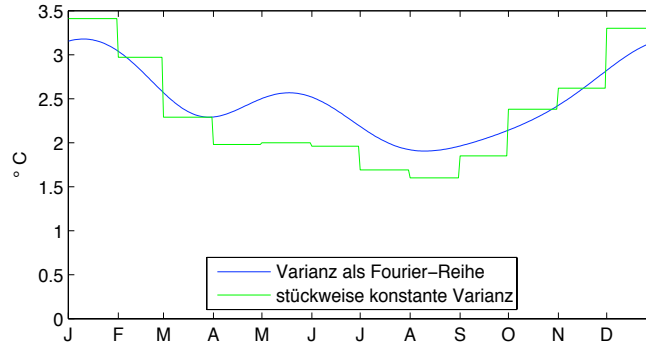


Abbildung 2.11: Standardabweichungen für die Ornstein-Uhlenbeck-Modelle mit stückweise (monatlich) konstanter Varianz und Varianz als Fourier-Reihe

II. Varianz als Fourier-Reihe

Benth/Šaltytė-Benth²⁵ [BŠB07] verwenden ein ähnliches Modell wie Alaton/Djehiche/Stillberger und berechnen damit auch die Preise von Wetterderivaten (siehe Abschnitt 3.1.1). Allerdings modellieren sie die Varianz nicht monatlich konstant, sondern als Fourier-Reihe niedriger Ordnung. Auch die deterministische Durchschnittstemperatur stellen sie als Fourier-Reihe dar.

Modell

Die Temperatur T_t zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ sei gegeben durch die folgende Gleichung (analog zu Gleichung (2.7)):

$$dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dW_t. \quad (2.10)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- s_t ist eine deterministische Funktion, die den Trend und die Saisonalität der Temperatur modelliert. Allgemein nehmen wir sie als beschränkt und stetig differenzierbar an. Es bietet sich an, s_t als Fourier-Reihe niedriger Ordnung zu modellieren. Später wird $I_1 = J_1 = 1$ gesetzt, so dass man eine Fourier-Reihe erster Ordnung erhält. $a, a_0, a_1, \dots, a_{I_1}, b, b_1, \dots, b_{J_1} \in \mathbb{R}$ sind konstant. Die Saisonalität wird beschrieben durch:

$$s_t = a + bt + a_0 + \sum_{i=1}^{I_1} a_i \sin\left(\frac{2i\pi t}{365}\right) + \sum_{j=1}^{J_1} b_j \cos\left(\frac{2j\pi t}{365}\right).$$

- σ_t ist eine stetig differenzierbare und beschränkte Funktion, die die tägliche Volatilität der Temperaturabweichungen beschreibt. Wir modellieren σ_t^2 ebenfalls als abgeschnittene Fourier-Reihe. Später wird $I_2 = J_2 = 4$ gesetzt, so dass man eine Fourier-Reihe 4. Ordnung erhält. $c, c_1, \dots, c_{I_2}, d_1, \dots, d_{J_2} \in \mathbb{R}$ sind konstant. Die Varianz ist gegeben durch:

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^{I_2} c_i \sin\left(\frac{2i\pi t}{365}\right) + \sum_{j=1}^{J_2} d_j \cos\left(\frac{2j\pi t}{365}\right).$$

In Abbildung 2.11 sieht man diese Varianzfunktion mit den geschätzten Parametern im Vergleich zur stückweise konstanten Varianz aus dem vorherigen Abschnitt.

- $\kappa \in \mathbb{R}$, W ist eine Standard-Brownsche Bewegung.

²⁵beide *Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo, Norwegen*

Auch dieses Modell erfüllt die vier Bedingungen an ein Temperaturmodell. Mit dem Startwert $T_0 \in \mathbb{R}$ erhält man als Lösung der Gleichung (2.10):

$$T_t = s_t + (T_0 - s_0)e^{-\kappa t} + \int_0^t \sigma_u e^{-\kappa(t-u)} dW_u.$$

Diese Darstellung zeigt, dass die Temperatur zu jeder Zeit normalverteilt ist, aber zu einem Mittelwert zurückkehrt, der durch die saisonale Funktion s_t definiert ist. Die Geschwindigkeit der Mean-Reversion wird durch κ bestimmt, die Varianz der Temperatur schwankt saisonal durch σ_t .

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden tägliche Durchschnittstemperaturen in Stockholm vom 01.01.1969 bis zum 19.12.2004, also 16059 Daten. Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten sie folgende Schätzwerte für die Parameter:

Saisonalität s_t					Mean-Reversion	
a	b	a_0	a_1	b_1	κ	
6,28	0,0001	0,07	-10,40	22,00	0,198	

Varianz σ_t^2								
c	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4
6,19	0,94	-0,39	0,59	0,07	2,08	1,22	0,46	-0,07

Anhand dieser geschätzten Parameter wird in Abbildung 2.14 die Temperatur über 5 Jahre als Zeitreihe simuliert. Dafür wird sie als folgende Zeitreihe mit $i \in \mathbb{N}_0$ und einer Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ angenähert:

$$T_{i+1} = s_{i+1} + e^{-\kappa}(T_i - s_i) + e^{-\kappa}\sigma_i\epsilon_i.$$

Rosmanith [Ros07] wendet dieses Modell von Benth/Šaltytė-Benth auf Städte in Deutschland an und kommt zu dem Ergebnis, dass es auch dort die Temperatur gut abbildet. Er verbessert das Modell, indem er den Abhängigkeitsbereich der Temperatur von einem auf drei Tage erhöht und die Temperatur als AR(3)-Prozess modelliert. Diese Erweiterung bildet den Temperaturwert aus statistischer Sicht völlig zufriedenstellend ab. Allerdings ist es mit diesem Modell dann nicht mehr möglich, die Preise von Wetterderivaten wie in Abschnitt 3.1.1 zu berechnen.

2.3.2 Die Temperatur als fraktionaler Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Brody²⁶/Syroka²⁷/Zervos²⁸ [BSZ02] verwenden ein Ornstein-Uhlenbeck-Modell basierend auf der fraktionalen Brownschen Bewegung (siehe Def. 1.2.18). Das Modell wird motiviert durch die empirische Untersuchung, dass die Temperaturdynamiken langfristige zeitliche Abhängigkeiten aufweisen und die Temperaturschwankungen normalverteilt sind. Benth [Ben03] verwendet das gleiche Modell auch für die Bewertung von Wetterderivaten (siehe Abschnitt 3.1.2).

²⁶ *Blackett Laboratory, Imperial College, London, UK*

²⁷ *Centrica PLC, Slough, Berkshire, UK*

²⁸ *Department of Mathematics, King's College London, London, UK*

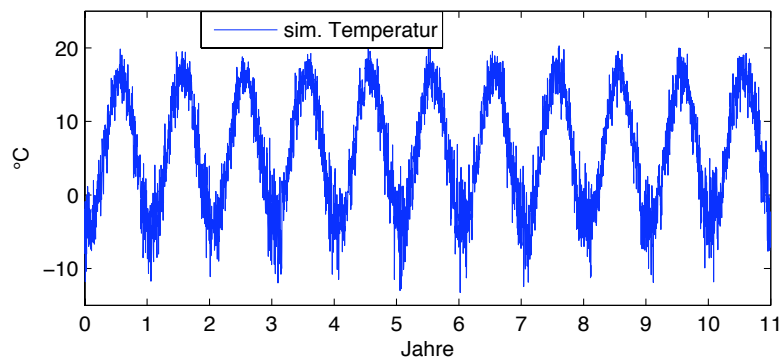


Abbildung 2.12: Simulation der Temperatur in Stockholm über 5 Jahre als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit stückweise konstanter Varianz mit den in [ADS02] geschätzten Parametern

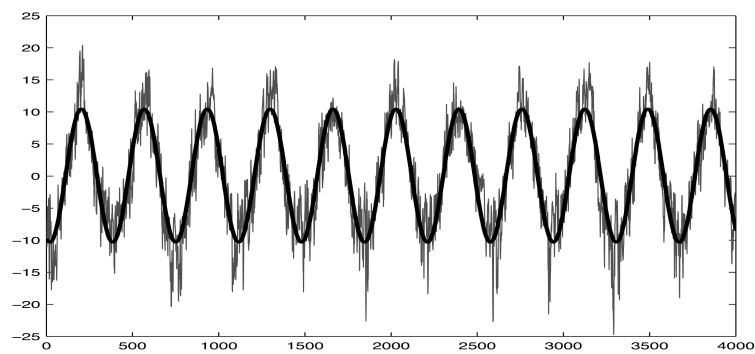


Abbildung 2.13: Tägliche Durchschnittstemperatur (trendbereinigt) in Stockholm sowie die angepasste saisonale Komponente, 01.01.1994-31.12.2004, Quelle: [BŠB07]

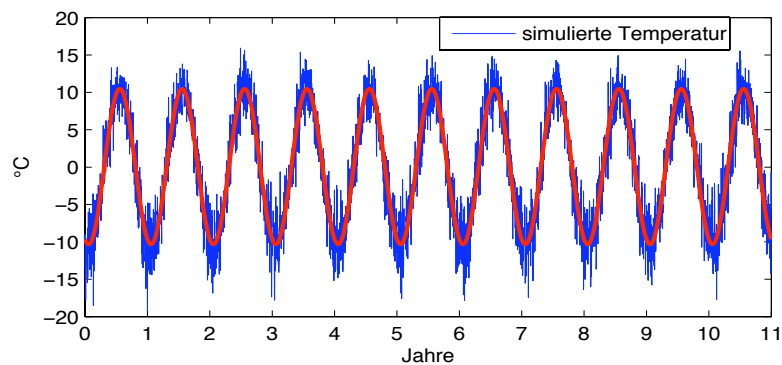


Abbildung 2.14: Simulation der trendbereinigten Temperatur in Stockholm über 11 Jahre als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Varianz als Fourier-Reihe mit den in [BŠB07] geschätzten Parametern sowie die saisonale Komponente (rot)

Modell

Die Temperatur $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist gegeben durch:

$$\boxed{dT_t = \kappa_t(s_t - T_t) dt + \sigma_t dW_t^H.} \quad (2.11)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- $\kappa_t > 0$ stellt die Geschwindigkeit der Mean-Reversion dar und wird später bei der Schätzung als konstant angenommen.
- s_t ist die saisonale Komponente, eine messbare und beschränkte Funktion.
- $\sigma_t > 0$ ist die Volatilität und wird später als Sinuskurve geschätzt.
- $H \geq \frac{1}{2}$ bezeichnet den Hurst-Parameter der fraktionalen Brownschen Bewegung W_t^H .

Dieses Modell berücksichtigt nicht den Trend der globalen Entwicklung. Die Abhängigkeit der Temperatur von vorherigen Werten wird durch den Hurst-Parameter $H > \frac{1}{2}$ erfasst.

Als Lösung von (2.11) erhält man mit Startwert $T_0 \in \mathbb{R}$:

$$T_t = T_0 + \int_0^t \kappa_u(s_u - T_u) du + \int_0^t \sigma_u dW_u^H. \quad (2.12)$$

Eine explizite Lösung ist gegeben durch:

$$T_t = e^{-\int_0^t \kappa_v dv} \left(T_0 + \int_0^t \kappa_u s_u e^{\int_0^u \kappa_v dv} du \right) + \int_0^t \sigma_u e^{-\int_u^t \kappa_v dv} dW_u^H. \quad (2.13)$$

Für alle $t \geq 0$ ist T_t eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu_t := \mathbb{E}[T_t]$ und Varianz $\Sigma_t := \text{Var}[T_t]$, gegeben durch:

$$\mu_t = e^{-\int_0^t \kappa_v dv} \left(T_0 + \int_0^t \kappa_u s_u e^{\int_0^u \kappa_v dv} du \right), \quad (2.14)$$

$$\Sigma_t = e^{-2\int_0^t \kappa_s ds} \int_0^t \int_0^t \sigma_u \sigma_v e^{\int_0^u \kappa_s ds} e^{\int_0^v \kappa_s ds} \phi(u, v) du dv, \quad (2.15)$$

wobei $\phi(u, v) = H(2H - 1)|u - v|^{2H-2}$ (siehe Satz 1.2.19).

Schätzung der Parameter

Die Autoren führen Schätzungen auf Basis der Central England Temperature (CET) von 1772 bis 1999 durch, der längsten verfügbaren Temperaturlaufzeichnung. Sie verwenden die ST-Analyse, um den Parameter H zu schätzen. Dieses Verfahren wurde von Syroka/Toumi [ST01] eingeführt und untersucht die Abhängigkeit der Variabilität der saisonalitätsbereinigten Temperaturschwankungen von der Zeit (**Sigma – T**). Als beste Schätzung für den Hurst-Parameter H ergibt sich 0,61. Dieser Hurst-Parameter erfasst optimal Zeitskalen zwischen 15 und 1000 Tagen, die kurzfristige Beständigkeit des Wetters für Zeitskalen zwischen 2 und 15 Tagen wird jedoch nicht richtig berücksichtigt. Wählt man $H = 0,61$, $\kappa_t \equiv 0,95$ und

$$s_t = 10 - 6,3 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 1,2\right),$$

$$\sigma_t = 2,5 + 0,5 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 1,1\right),$$

stimmen Mittelwert und Varianz der modellierten Temperatur mit Mittelwert und Varianz der täglichen CET-Daten von 1990-1999 überein. Abbildung 2.15 zeigt eine Temperatursimulation anhand der geschätzten Parameter und im Vergleich dazu die tatsächlichen Werte 1990-1999. Da

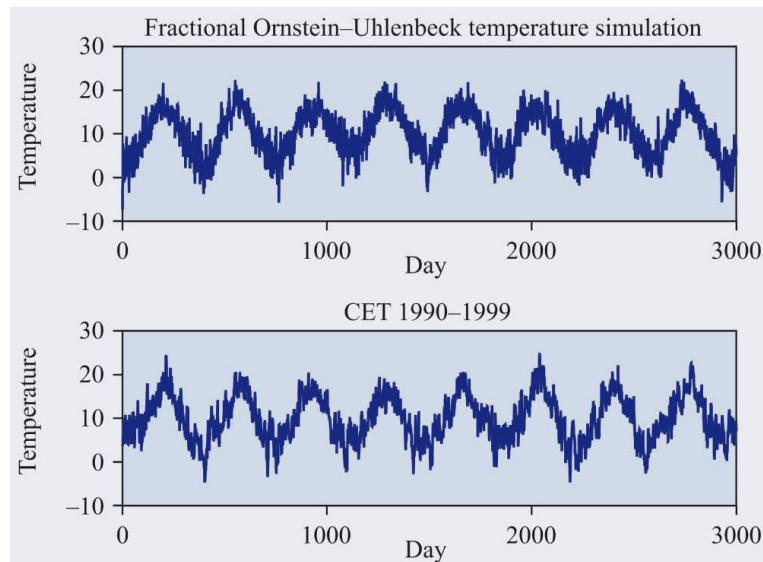


Abbildung 2.15: Simulation der Temperatur von 1990 bis 1999 als fraktionaler Ornstein-Uhlenbeck-Prozess sowie die tatsächliche Temperatur 1990-1999, Quelle: [BSZ02]

die kurzfristige Beständigkeit des Wetters unterschätzt wird, sind die Schwankungen innerhalb kurzer Zeiträume zu groß, was man daran erkennt, dass die Simulation in der Abbildung „dicker“ erscheint.

2.3.3 Die Temperatur als Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Benth/Šaltyté-Benth [BŠB05] verwenden das gleiche Ornstein-Uhlenbeck-Modell wie Gleichung (2.7) von Alaton/Djehiche/Stillberger in Abschnitt 2.3.1, nur dass sie statt der Brownschen Bewegung W_t allgemein einen Lévy-Prozess L_t (siehe Def. 1.2.20) benutzen. Für den Fall, dass die Temperaturresiduen (Temperaturdaten minus Saisonalität) nicht normalverteilt sind, schlagen sie die verallgemeinerte hyperbolische Verteilung vor, die auch schiefe Verteilungen erfassen kann. Auf Basis dieses Modells werden in Abschnitt 3.1.3 die Preise von Wetterderivaten berechnet.

Modell

Die Temperatur $T = (T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sei gegeben durch:

$$\boxed{dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dL_t.} \quad (2.16)$$

Folgende Parameter werden verwendet:

- s_t stellt die (langfristige) Durchschnittstemperatur zur Zeit t dar:

$$s_t = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi(t - \phi)}{365}\right)$$

mit geeigneten Konstanten $a_0, a_1, \phi \in \mathbb{R}$;

- $\kappa \in \mathbb{R}$ gibt die Geschwindigkeit der Mean-Reversion an.
- σ_t beschreibt die Volatilität und ist eine messbare, beschränkte Funktion.

- L_t sei ein quadratisch integrierbarer Lévy-Prozess, der nur aus Sprüngen besteht. Die quadratische Integrierbarkeit gewährleistet, dass die Integrabilitätsbedingung

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} z^2 \ell(dz) < \infty.$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\ell(dz)$ das Lévy-Maß auf $\mathbb{R} \setminus 0$.

Die Lévy-Chintchin-Darstellung des Prozesses L_t (vgl. Satz 1.2.21) ist gegeben durch

$$L_t = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} z \tilde{N}(dt, dz),$$

wobei $N(dt, dz)$ das zu L_t gehörende, homogene Poisson-Zufallsmaß ist und $\tilde{N}(dt, dz) := N(dt, dz) - \ell(dz) dt$ sein kompensiertes (Poisson-) Zufallsmaß.

- Die Autoren empfehlen, einen Lévy-Prozess mit Randwerten, die der Klasse der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen (siehe Def. 1.2.22) folgen, zu verwenden. Diese sehr allgemeine Familie kann die Schiefe und die semi-schweren Schwänze (*semi-heavy tails*) der Verteilung modellieren, die die Autoren in norwegischen Daten beobachten. Außerdem sind ihre Dichte und ihre charakteristische, momentenerzeugenden Funktionen bekannt, was empirische Studien und die Bewertung von Derivaten erleichtert.
- Die verallgemeinerte hyperbolische Verteilung ist eine Familie von unbegrenzt teilbaren Verteilungen mit der Dichtefunktion

$$f_{gh}(x; \lambda, \mu, \alpha, \beta, \delta) = c (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} \exp(\beta(x - \mu)) \cdot K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right),$$

wobei K_s die modifizierte Bessel-Funktion dritter Art (siehe Seite 30) mit Index s bezeichnet und die normalisierende Konstante c gegeben ist durch

$$c = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}.$$

Da die Autoren die Temperatur nur über eine kurze Zeitspanne (z. B. bis zu einem Jahr) modellieren, berücksichtigen sie nicht den Trend der globalen Entwicklung. Die Autokorrelation ist ab einer Verzögerung von 3 sehr niedrig, weshalb sie sie nicht berücksichtigen. Die Bedingungen der Saisonalität der Temperatur und der Standardabweichung werden erfüllt.

Mit dem Startwert T_0 ergibt sich als Lösung von (2.16):

$$T_t = s_t + (T_0 - s_0)e^{-\kappa t} + \int_0^t \sigma_u e^{-\kappa(t-u)} dL_u.$$

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden einen Datensatz von täglichen Durchschnittstemperaturen für sieben norwegische Städte²⁹ vom 01.01.1990 bis zum 04.08.2003. Sie haben somit sieben Datensätze mit je 4846 Daten zur Verfügung.

²⁹Alta, Bergen, Kristiansand, Oslo, Stavanger, Tromsø und Trondheim

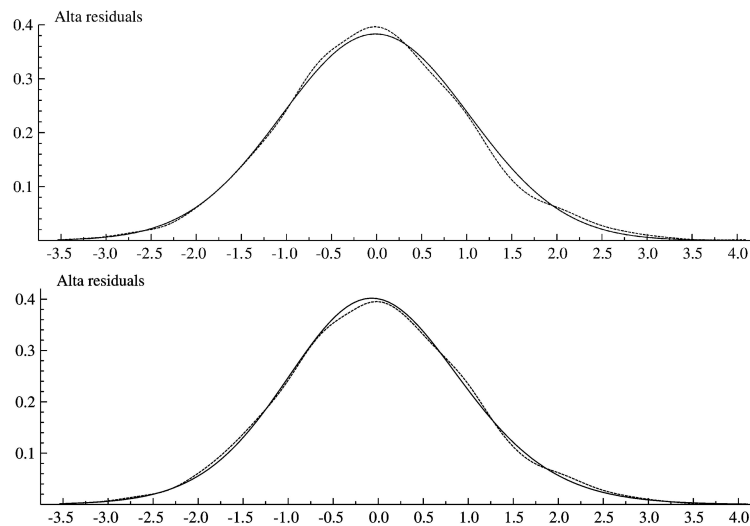


Abbildung 2.16: Verteilung der tatsächlichen Temperaturresiduen in Alta (---) im Vergleich zur geschätzten Normalverteilung (—, oben) bzw. verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung (—, unten), Quelle: [BŠB05]

Die Parameter der Saisonalität $s_t = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi(t-\phi)}{365}\right)$ sowie der Mean-Reversion κ werden geschätzt als:

	Saisonalität s_t			Mean-Reversion
	a_0	a_1	ϕ	κ
Alta	2,17	-10,21	20,79	0,23
Bergen	8,41	-6,91	21,64	0,19
Kristiansand	7,56	-8,28	20,08	0,24
Oslo	6,90	-10,28	15,31	0,20
Stavanger	8,13	-6,86	24,43	0,20
Tromsø	3,33	-7,73	22,99	0,19
Trondheim	6,20	-8,45	17,68	0,21

Die Autoren schätzen die Parameter der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung μ (Lage), α (Steilheit), β (Schiefe), δ (Skalierung) und λ (Klasse) nach der Maximum-Likelihood-Methode für vier der sieben Städte. Empirische Untersuchungen zeigen, dass die Temperaturresiduen von Stavanger, Tromsø und Trondheim durch eine Normalverteilung modelliert werden können, so dass die Parameter der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung für diese Städte nicht geschätzt werden. Für Oslo wurden nur Ergebnisse erzielt, wenn man den Parameter $\lambda = 30$ setzt, was gut zu den Daten passt. Es ergeben sich folgende Schätzwerte:

	Verallgemeinerte hyperbolische Verteilung				
	μ	α	β	δ	λ
Alta	-0,3557	2,963	0,322	2,4899	1,323
Bergen	-3,5227	11,876	4,388	0,019906	48,861
Kristiansand	-1,4222	8,304	1,412	0,0012306	22,732
Oslo	-8,6747	26,282	18,735	6,684	30*

Abbildung 2.16 zeigt die tatsächliche Verteilung der Temperaturresiduen in Alta im Vergleich zur am besten geeigneten Normalverteilung und verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung.

2.3.4 Die Temperatur als CAR(p)-Prozess

In diesem Abschnitt wird ein zeitstetiger Autoregressions-Prozess (CAR-Prozess, siehe Def. 1.2.24) verwendet, um die Temperatur zu modellieren. Die Darstellung basiert auf der Arbeit von Benth/Šaltytė-Benth/Koekebakker³⁰ [BŠBK07]. Die Autoren erweitern damit ihr Modell der Temperatur als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (Abschnitt 2.3.1) um Autoregression höherer Ordnung. Dieses Modell ermöglicht die Berechnung von expliziten Future-Preisynamiken (siehe Abschnitt 3.1.4).

Modell

Die Temperatur $T = (T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sei gegeben durch:

$$\boxed{T_t = s_t + X_t^1.} \quad (2.17)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- s_t ist eine (deterministische) saisonale Funktion, die die Durchschnittstemperatur darstellt:

$$s_t = a_0 + a_1 t + a_2 \cos\left(\frac{2\pi(t - a_3)}{365}\right)$$

mit den Konstanten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

- X_t^q steht für die q -te Koordinate des Vektors \mathbf{X}_t , $q = 1, \dots, p$. \mathbf{X}_t ist ein stochastischer Prozess in \mathbb{R}^p , der für $p \geq 1$ definiert wird durch die vektorielle Ornstein-Uhlenbeck-Gleichung:

$$d\mathbf{X}_t = A \mathbf{X}_t dt + \mathbf{e}_p \sigma_t dW_t. \quad (2.18)$$

Dabei ist die $p \times p$ -Matrix A gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}$. Später wird $p = 3$ gesetzt. Die Matrix A entspricht dem Parameter κ aus den eindimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Modellen der vorherigen Abschnitte.

\mathbf{e}_k steht für den k -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^p , $k = 1, \dots, p$. Die Standardabweichung σ_t ist strikt positiv, stetig und beschränkt und ihr Quadrat wird als Fourier-Reihe 4. Ordnung mit $(c_1, \dots, c_9) \in \mathbb{R}^9$ modelliert:

$$\sigma_t^2 = c_1 + \sum_{k=1}^4 \left[c_{2k} \cos\left(\frac{2\pi kt}{365}\right) + c_{2k+1} \sin\left(\frac{2\pi kt}{365}\right) \right].$$

Dieses Modell erfüllt alle vier Bedingungen an ein Temperaturmodell.

Mit dem Anfangswert $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, ergibt sich als Lösung von Gleichung (2.18):

$$\mathbf{X}_t = e^{At} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u dW_u$$

mit $t \geq 0$.

³⁰Department of Economics and Business Administration, Agder University College, Kristiansand, Norwegen

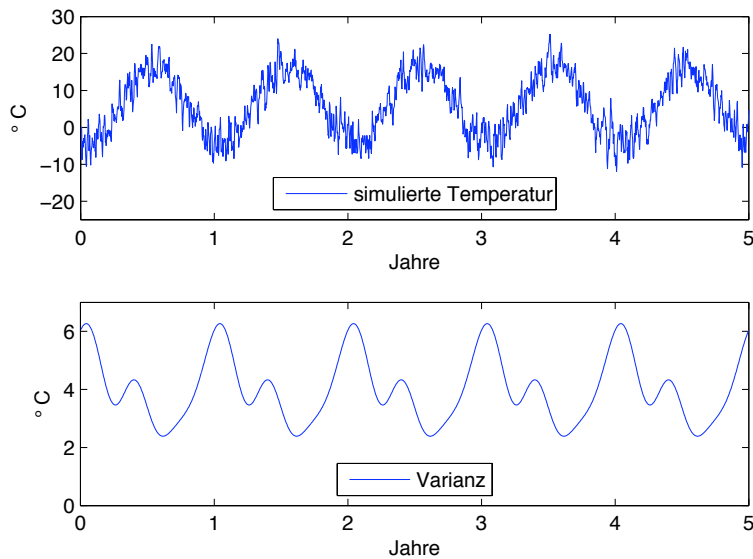


Abbildung 2.17: Simulation der Temperatur als CAR(3)-Prozess und der Varianz über 5 Jahre

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden als Daten die täglichen Durchschnittstemperaturen in Stockholm vom 01.01.1961 bis zum 25.05.2006, also 16581 Daten, und gehen davon aus, dass $p = 3$ ausreichend ist. Der Temperaturprozess wird also als CAR(3)-Prozess mit den folgenden geschätzten Parametern modelliert:

Saisonalität s_t				Matrix A		
a_0	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
6,3759	0,0001	10,4411	-165,7591	2,0429	3,3388	0,2959

Varianz σ_t^2								
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
4,0107	1,1755	0,6813	0,7403	-0,1508	0,1533	0,4294	-0,0416	-0,015

Zur Simulation wird der Prozess als Zeitreihe angenähert. Die Temperatur $T(i)$ am Tag i , $i \in \mathbb{N}_0$, genüge folgender Gleichung:

$$X(i) = T(i) - s(i),$$

$$X(i+3) \approx (3 - \alpha_1)X(i+2) + (2\alpha_1 - \alpha_2 - 1)X(i+1) + (\alpha_2 - 1 - (\alpha_1 + \alpha_3))X(i) + \sigma(i)\epsilon(i),$$

wobei $\{\epsilon(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen darstellt.

Eine Simulation der Temperatur und der Varianz in Stockholm über 5 Jahre mit den geschätzten Parametern ist in Abbildung 2.17 zu sehen.

2.3.5 Die Windgeschwindigkeit als CAR(p)-Prozess

Benth/Šaltytė-Benth [BŠB09] verwenden wie in Kapitel 2.3.4 einen CAR(p)-Prozess (siehe Def. 1.2.24), um die tägliche Durchschnittswindgeschwindigkeit zu modellieren. Auf Basis dieses Modells werden in Abschnitt 3.1.4 auch die Preise von Windderivaten berechnet.

Modell

Die Windgeschwindigkeit $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sei gegeben durch:

$$V_t = \begin{cases} (\lambda (s_t + X_t^1) + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \exp (s_t + X_t^1), & \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- Die Saisonalität s_t wird als Fourier-Reihe 2. Ordnung modelliert, da die Autoren jährliche und halbjährliche Saisonalitäten der Windgeschwindigkeit beobachten (siehe Abbildung 2.18):

$$s_t = a_0 + a_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + a_2 \sin \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + a_3 \cos \left(\frac{4\pi t}{365} \right) + a_4 \sin \left(\frac{4\pi t}{365} \right)$$

mit den Konstanten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

- X_t^q steht für die q -te Koordinate des Vektors \mathbf{X}_t , $q = 1, \dots, p$. \mathbf{X}_t ist ein stochastischer Prozess in \mathbb{R}^p , der für $p \geq 1$ definiert wird durch die vektorielle Ornstein-Uhlenbeck-Gleichung:

$$d\mathbf{X}_t = A \mathbf{X}_t dt + \mathbf{e}_p \sigma_t dW_t. \quad (2.20)$$

Dabei ist die $p \times p$ -Matrix A gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, \dots, p$, $p \in \mathbb{N}$. Später wird $p = 4$ gesetzt.

\mathbf{e}_k steht für den k -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^p , $k = 1, \dots, p$. Die Varianzfunktion σ_t^2 wird als Fourier-Reihe 3. Ordnung mit $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^4$ modelliert:

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{k=1}^3 c_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{365} \right).$$

- Die zugrundeliegenden Daten der Windgeschwindigkeiten wurden mit der Box-Cox-Transformation symmetrisiert. Diese ist ein Instrument der Zeitreihenanalyse und definiert als:

$$y^{(\lambda)} := \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \ln y, & \lambda = 0, \end{cases}$$

wobei y die Daten und $y^{(\lambda)}$ ihre Transformation bezeichnen. Bei den transformierten Daten wurden saisonale und autoregressive Effekte festgestellt. In Gleichung (2.19) erkennt man die Umkehrung der Box-Cox-Transformation. Später wird zur Vereinfachung $\lambda \in [0, 1]$ angenommen, außerdem $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N}$, was sich mit den geschätzten Werten für λ deckt.

Mit dem Anfangswert $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, ergibt sich als Lösung von (2.20) wie im vorherigen Abschnitt mit $t \geq 0$:

$$\mathbf{X}_t = e^{At} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u dW_u.$$

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden als Daten die täglichen Durchschnittswindgeschwindigkeiten im Bundesstaat New York vom 01.01.1987 bis zum 31.12.2001, die auf der Homepage der US Futures Exchange³¹ kostenlos zur Verfügung gestellt werden.

Es wird $\lambda = 0,2$ geschätzt. Außerdem ergeben sich folgende Schätzwerte:

Saisonalität s_t					Matrix A			
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	α_1	α_2	α_3	α_4
1,91	0,26	0,08	-0,04	-0,07	3,645	5,039	3,133	0,712

Varianz σ_t^2			
c_0	c_1	c_2	c_3
0,208	0,033	-0,019	-0,010

Zur Simulation wird der Prozess als Zeitreihe angenähert. Die Windgeschwindigkeit $V(i)$ am Tag i , $i \in \mathbb{N}_0$, genüge folgender Gleichung:

$$V(i) = (\lambda(s(i) + X(i)) + 1)^{1/\lambda},$$

$$X(i) \approx (4 - \alpha_1)X(i-1) + (3\alpha_1 - \alpha_2 - 6)X(i-2) + (4 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_1)X(i-3) \\ + (\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_1 - 1)X(i-4) + \sigma(i)\epsilon(i),$$

wobei $\{\epsilon(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen darstellt.

Abbildung 2.18 zeigt die mittlere tägliche Windgeschwindigkeit im Bundesstaat New York vom 01.01.2002 bis zum 31.12.2006. In Abbildung 2.19 ist im Vergleich dazu eine Simulation der Windgeschwindigkeit über 5 Jahre als CAR(4)-Prozess mit den geschätzten Parametern zu sehen.

2.3.6 Der Niederschlag als Markov-Prozess

Niederschlag ist ein stark lokales Phänomen, so dass es schwierig ist, ein geeignetes mathematisches Modell aufzustellen. Carmona/Diko³² [CD05b] gehen davon aus, dass „Unwetter“ gemäß einem Poisson-Prozess (siehe Def. 1.2.7) auftreten. Innerhalb eines Unwetters folgt der Niederschlag dann einem homogenen Markov-Prozess (siehe Def. 1.2.5). Dieses Modell wird später in Abschnitt 3.2.3 verwendet, um Indifferenzpreise von Niederschlagsderivaten zu berechnen.

Niederschlagsdaten werden zwar in diskreten Zeitintervallen aufgezeichnet, allerdings erfolgen die Beobachtungen doch häufig genug für eine vollständige, fast zeitstetige Beobachtung der Niederschlagsintensität. Wenn die Niederschlagsintensität in einem Zeitraum konstant bleibt, kann eine Niederschlagsperiode beschrieben werden durch ein Paar von reellen Zahlen $(\xi, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, wobei $\beta \in \mathbb{R}_+$ die Länge der Zeit ist, für die die Niederschlagsintensität konstant gleich $\xi \in \mathbb{R}_+$ bleibt. Bezeichne $N = \{\xi_i, \beta_{i+1}\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ die Folge von Paaren, die die folgenden Perioden konstanter Niederschlagsintensität beschreiben. Die Folge N stellt die Menge der statistischen Daten dar, für die ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell aufgestellt werden soll.

Es wird angenommen, dass der Niederschlag aus *Unwettern* (*storms*) zusammengesetzt ist, die gemäß einem Poisson-Prozess auftreten.

³¹US Futures Exchange: <http://www.usfe.com/>

³²beide *Department of Operations Research & Financial Engineering, Princeton University, Princeton, New Jersey, USA*

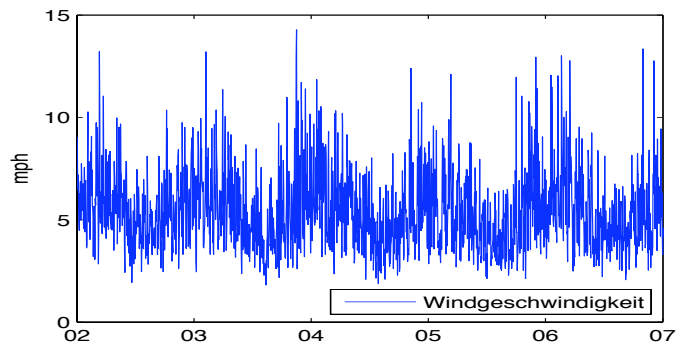


Abbildung 2.18: Mittlere tägliche Windgeschwindigkeit im Bundesstaat New York in Meilen pro Stunde vom 01.01.2002 bis zum 31.12.2006, Daten: US Futures Exchange

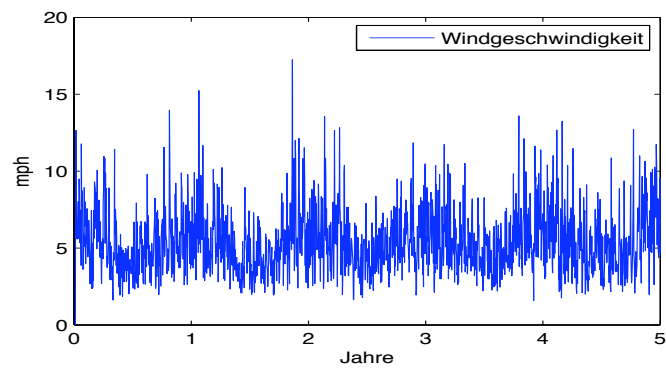


Abbildung 2.19: Simulation der täglichen Windgeschwindigkeit im Bundesstaat New York in Meilen pro Stunde über 5 Jahre als CAR(4)-Prozess anhand der in [BŠB09] geschätzten Parameter

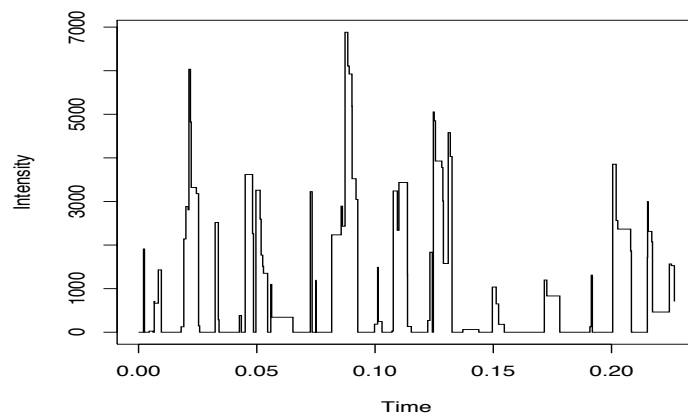


Abbildung 2.20: Simulation des Niederschlags als Sprung-Markov-Prozess, Quelle: [CD05b]

Modell

Das vorgeschlagene Modell der Regenfallintensität innerhalb eines einzelnen Unwetters ist ein homogener Sprung-Markov-Prozess Y_t , dessen infinitesimaler Erzeuger G gegeben ist durch:

$$G\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (\varphi(y) - \varphi(x))A(x, y)\nu(dy).$$

Dabei werden folgende Parameter verwendet:

- $A(x, y)$ ist gegeben durch:

$$A(x, y) = \left(\lambda_1 \lambda_u e^{-\lambda_u(y-x)} \mathbf{1}_{(x, \infty)}(y) + \bar{\lambda}_2(x) \lambda_d e^{-\lambda_d(x-y)} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(y) + \bar{\lambda}_2(x) e^{-\lambda_d x} \mathbf{1}_{\{0\}}(y) \right)$$

mit $(\lambda_1, \lambda_u, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^3$ und $\bar{\lambda}_2(\xi) = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\xi) \left(\lambda_2^{(I)} + \lambda_2^{(II)} \kappa(\xi) \right)$, wobei $(\lambda_2^{(I)}, \lambda_2^{(II)}) \in \mathbb{R}_+^2$. $\kappa(\xi)$ ist definiert auf \mathbb{R}_+ und genügt: $\kappa(x) = x$ für $0 \leq x \leq K$ (für ein großes $K \in \mathbb{N}$), es ist beschränkt, 3-mal differenzierbar, $(\partial/\partial x)\kappa_n^K(x) > 0$.

- ν ist ein Lebesgue-Maß auf $[0, \infty)$ mit zusätzlicher Punktmasse von 1 an der Stelle 0.

Das Modell ist bestimmt durch den Parametervektor $(\lambda_1, \lambda_2^{(I)}, \lambda_2^{(II)}, \lambda_u, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+^5$.

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden Niederschlagsdaten einer Wetterstation in Bergen (Norwegen) für das Kalenderjahr 2002. Um den Preis einer Option auf Niederschlag im Juni und Juli 2004 zu bestimmen, werden die Parameter des Modells berechnet. Sie basieren auf den Niederschlagswerten von Mai bis Juli 2002. Nach der Maximum-Likelihood-Schätzung ergeben sich folgende Werte:

Niederschlagsmodell				
λ_1	$\lambda_2^{(I)}$	$\lambda_2^{(II)}$	λ_u	λ_d
78,62 $\frac{1}{d}$	0,000 $\frac{1}{d}$	2,819 $\frac{1}{mm}$	0,012 $\frac{d}{mm}$	0,011 $\frac{d}{mm}$

Abbildung 2.20 zeigt eine Simulation des Niederschlags als Sprung-Markov-Prozess.

3 Bewertung und Absicherung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit verschiedenen Methoden, die Preise von Wetterderivaten zu bestimmen (*pricing*) und Strategien der Absicherung (*hedging*) zu finden.

Die einfachste und häufig in der Praxis verwendete Möglichkeit, die Preise von Wetterderivaten zu bestimmen, ist die **Burn-Analyse**. Dabei wird davon ausgegangen, dass man die erwartete Auszahlung der betrachteten Periode anhand der Auszahlungen im selben Zeitraum vergangener Jahre vorhersagen kann. Für ein Wetterderivat auf den CAT-Index im Monat Dezember ermittelt man beispielsweise, wieviel ein solches Derivat im Dezember vergangener Jahre ausgezahlt hätte. Der Mittelwert dieser Auszahlungen plus einen Risikoaufschlag (z. B. in Abhängigkeit der Standardabweichung) ergibt dann den Preis des Derivats. Diese Methode kann ohne großen Aufwand verwendet werden und das Ergebnis bietet einen guten Richtwert.

Allerdings ist das Ergebnis stark von der Länge des verwendeten Datensatzes abhängig. Die folgende Tabelle zeigt den historischen Mittelwert der CAT im Dezember der vergangenen Jahre in Berlin-Tempelhof in Abhängigkeit des betrachteten Zeitraums¹:

Jahre	Mittelwert
3 2006-2008	100,87
5 2004-2008	84,37
8 2001-2008	55,52
10 1999-2008	62,86
15 1994-2008	46,05

Der Mittelwert der CAT im Dezember in Berlin schwankt um einen Faktor größer als zwei je nach Anzahl der betrachteten Jahre. Somit ergeben sich große Unterschiede bei der erwarteten Auszahlung. Hee/Hofmann [HH06] ermitteln für die Prämie einer Call-Option auf CDDs von Mai bis September in Frankfurt sogar Schwankungen bis zum Faktor 4, je nachdem, welche Zahl von Jahren historischer Daten (zwischen 5 und 34) verwendet werden.

Des Weiteren wird das Ergebnis der Burn-Analyse stark von extremen Wetterereignissen wie z. B. dem Rekordsommer 2003 beeinflusst, die die gleiche Gewichtung wie ein durchschnittliches Wetterereignis erhalten. Auch werden aktuelle klimatische Entwicklungen wie El Niño oder globale Erwärmung nicht berücksichtigt [HH06].

Eine bessere Möglichkeit, den Preis eines Wetterderivats zu bestimmen, bietet die Bewertung auf Basis eines stochastischen Modells für das Wetter. Diverse Möglichkeiten, das Wetter zu modellieren, hatten wir in Kapitel 2 dargestellt. Ein solches Wettermodell ist weit weniger anfällig bezüglich seltener Wetterextrema. Hat man einmal ein Wettermodell für einen Ort aufgestellt und die Parameter geschätzt, ermöglicht es außerdem die Bewertung sämtlicher Wetterderivate für diesen Ort, unabhängig von dem darauf basierenden Wetterindex, der Maturität und der Laufzeit. In Abschnitt 3.1 behandeln wir die Bewertung und Absicherung von Wetterderivaten auf Basis einiger Wettermodelle. Im Anschluss wenden wir uns der Bewertung auf Basis von Nutzenfunktionen zu (Abschnitt 3.2). Abschließend werden wir in Abschnitt 3.3 untersuchen,

¹Die Werte der CAT im Dezember der letzten 10 Jahre in Berlin sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
84,75	99,70	-0,15	-62,70	85,15	73,25	46,00	175,70	71,60	55,30

welche Möglichkeiten bestehen, Wetterrisiken abzusichern, wenn für den betrachteten Ort keine Wetterderivate gehandelt werden und man auf Wetterderivate anderer Orte zurückgreifen muss.

3.1 Bewertung und Absicherung auf Basis eines Wettermodells

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Bewertung und Absicherung von Wetterderivaten anhand eines Wettermodells. Dabei werden einige stetige Modelle aus Abschnitt 2.3 verwendet. Im stetigen Rahmen sind die Wetterindizes über eine Periode $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, folgendermaßen definiert (im Gegensatz zum diskreten Fall in Abschnitt 1.1.4):

$$\begin{aligned} \text{HDD}(\tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(\rho - T_s, 0) \, ds, \\ \text{CDD}(\tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T_s - \rho, 0) \, ds, \\ \text{CAT}(\tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s \, ds, \\ \text{PRIM}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s \, ds. \end{aligned}$$

Dabei wird T_t als die momentane Temperatur zur Zeit t , $t \in \mathbb{R}_+$, betrachtet. Zur Vereinfachung wird der Auszahlungsbetrag pro Einheit des Wetterindex auf eins gesetzt. Damit erhält der Käufer eines Derivats auf einen Wetterindex als Auszahlung einfach den über die Messperiode gemessenen Wert des Index in entsprechender Währung. Bezeichne Y den Wetterindex, auf den der Future-Vertrag abgeschlossen ist, also den HDD-, CDD-, CAT- oder PRIM-Index. Den Preis eines solchen Futures zur Zeit t mit Messperiode $[\tau_1, \tau_2]$ bezeichnen wir als $F_Y(t; \tau_1, \tau_2)$. Der Gewinn dieses Vertrages ist also gegeben durch:

$$Y - F_Y(t; \tau_1, \tau_2).$$

Angenommen, r sei die konstante Zinsrate. Dann ist der Future-Preis zur Zeit $t \leq \tau_1$ definiert als \mathcal{F}_t -adaptierter stochastischer Prozess $F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$, der der folgenden Gleichung genügt:

$$0 = e^{-r(\tau_2-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[Y - F_Y(t; \tau_1, \tau_2) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.1)$$

mit einem noch zu bestimmenden risikoneutralen Maß \mathbb{Q}^θ .

Aus der Adaptiertheit folgt für den Future-Preis $F_Y(t; \tau_1, \tau_2)$ aus Gleichung (3.1):

$$F_Y(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[Y \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.2)$$

Damit erhält man für die Future-Preise der vier angegebenen Wetterindizes:

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(\rho - T_s, 0) \, ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.3)$$

$$F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T_s - \rho, 0) \, ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.4)$$

$$F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s \, ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (3.5)$$

$$F_{\text{PRIM}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s \, ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.6)$$

Zwischen den Preisen der Indizes gilt trivialerweise folgender Zusammenhang:

$$F_{\text{PRIM}}(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2).$$

Außerdem gilt auch im stetigen Fall die **HDD-CDD-Parität** (vgl. Gleichung 1.7):

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \rho (\tau_2 - \tau_1) - F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) + F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2). \quad (3.7)$$

Um genauere Ausdrücke für den Future-Preis herzuleiten, muss man das risikoneutrale Maß \mathbb{Q}^θ bestimmen. Für den Maßwechsel wird eine Dichte Z_t^θ verwendet, wobei die Funktion θ in den einzelnen Abschnitten genauer angegeben wird und „Marktpreis des Risikos“ genannt wird. Dann erhält man einen Prozess \tilde{W} , der unter dem äquivalenten Maß \mathbb{Q}^θ eine Brownsche Bewegung ist. Schließlich kann man die Dynamiken unter dem neuen Maß angeben und die Preise berechnen.

3.1.1 Ornstein-Uhlenbeck-Modell

In Abschnitt 2.3.1 hatten wir zwei Ornstein-Uhlenbeck-Modelle für die Temperatur dargestellt, eines mit stückweise (monatlich) konstanter Varianz und eines mit Varianz als Fourier-Reihe. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Bewertung und Absicherung auf Basis dieser beiden Modelle.

I. Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Varianz als Fourier-Reihe

Dieser Abschnitt untersucht die Bewertung von Temperaturderivaten auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells mit Varianz als Fourier-Reihe nach Benth/ $\check{\text{S}}$ altytė-Benth [BŠB07] aus Kapitel 2.3.1. Dort wurden die Temperaturdynamiken folgendermaßen angegeben (siehe Gleichung 2.10):

$$dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dW_t.$$

Wir betrachten die Preisdynamiken von Futures, die auf einem Temperaturindex Y über einen bestimmten Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 < \tau_2$, basieren. Sei $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ eine reellwertige, beschränkte und messbare Funktion. Durch zeitveränderendes θ erhält man eine flexible Klasse von risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathbb{Q}^θ .

Der stochastische Prozess

$$Z_t^\theta = \exp \left(\int_0^t \frac{\theta_s}{\sigma_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\theta_s^2}{\sigma_s^2} ds \right)$$

ist der Dichtenprozess des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\mathbb{Q}^\theta(A) = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A Z_{t_{\max}}^\theta \right],$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion ist und t_{\max} ein fester Zeithorizont größer als die Handelszeiten aller relevanten Futures. Die Parameter der Standardabweichung σ_t sind in Abschnitt 2.3.1 so gewählt worden, dass die Funktion beschränkt und von 0 weg beschränkt ist, also $0 < c_1 \leq \sigma_t \leq c_2 < \infty$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$.

\mathbb{Q}^θ ist ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß und der Prozess

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \frac{\theta_t}{\sigma_t} dt$$

ist eine Standard-Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q}^θ . Für die Temperaturdynamik unter dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}^θ erhält man:

$$dT_t = ds_t + (\theta_t - \kappa(T_t - s_t)) dt + \sigma_t d\tilde{W}_t. \quad (3.8)$$

Eine explizite Form von T_t ist gegeben durch:

$$T_t = s_t + (T_0 - s_0)e^{-\kappa t} + \int_0^t \theta_u e^{-\kappa(t-u)} du + \int_0^t \sigma_u e^{-\kappa(t-u)} d\tilde{W}_u.$$

T_t ist unter \mathbb{Q}^θ normalverteilt mit Erwartungswert

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t] = s_t + (T_0 - s_0)e^{-\kappa t} + \int_0^t \theta_u e^{-\kappa(t-u)} du \quad (3.9)$$

und Varianz

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t] = \int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\kappa(t-u)} du. \quad (3.10)$$

Bewertung von HDD-Futures

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Berechnung der Preise für HDD-Futures auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells mit Varianz als Fourier-Reihe. Die Preise von CDD-Futures erhält man analog.

Bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, ϕ ihre Dichte.

Lemma 3.1.1. *Der Preis eines HDD-Futures zur Zeit t , dessen Index über $[\tau_1, \tau_2]$, $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$, gemessen wird, ist gegeben durch:*

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Sigma(t, \tau) (d(t, \tau, T_t) \Phi(d(t, \tau, T_t)) + \phi(d(t, \tau, T_t))) d\tau,$$

wobei

$$d(t, \tau, x) := \frac{\rho - \left(s_\tau + (x - s_t) e^{-\kappa(\tau-t)} + \int_t^\tau \theta_u e^{-\kappa(\tau-u)} du \right)}{\Sigma(t, \tau)},$$

$$\Sigma^2(t, \tau) := \int_t^\tau \sigma_u^2 e^{-2\kappa(\tau-u)} du.$$

Die Funktion $d(t, \tau, T_t)$ beschreibt also die Differenz aus dem Referenzwert ρ (meist 18°C) und dem Erwartungswert der Temperatur von t bis τ unter \mathbb{Q}^θ (vgl. Gleichung (3.9)), dividiert durch die Varianz von t bis τ (vgl. Gleichung (3.10)).

Für die Dynamik des HDD-Future-Preises $dF_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$ erhält man:

Lemma 3.1.2. *Die zeitliche Dynamik eines HDD-Futures, dessen Index über die Periode $[\tau_1, \tau_2]$ gemessen wird, ist gegeben durch:*

$$dF_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = -\sigma_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\kappa(\tau-t)} \Phi(d(t, \tau, T_t)) d\tau d\tilde{W}_t$$

für $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$. Die Funktion $d(t, \tau, T_t)$ wurde in Lemma 3.1.1 definiert.

Die Formel für den Preis F_{HDD} und seine Dynamik sind recht kompliziert und eignen sich nicht, um exakte Preise von Put- und Call-Optionen auf HDD- oder CDD-Futures zu berechnen. Deshalb muss man dafür numerische Näherungen verwenden. Ein Ansatz ist die Monte-Carlo-Methode, die die risikoneutrale Temperatur T_τ zur Ausübungszeit τ simuliert, und anschließend numerische Integration, um $F_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2)$ erhalten.

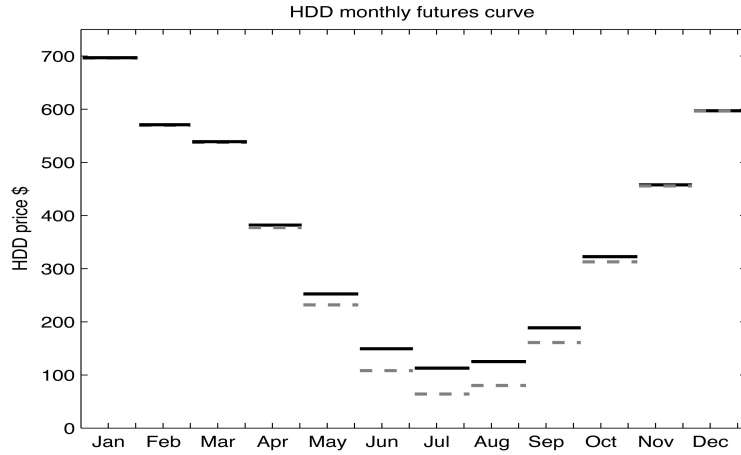


Abbildung 3.1: Die Future-Preise zur Zeit 0 auf den HDD-Index jedes Monats des Folgejahres, basierend auf dem Modell für die Stockholmer Temperaturen mit Varianz als Fourier-Reihe; die gestrichelten Linien geben die Preise an, wenn man die Varianz das ganze Jahr über konstant $\bar{\sigma} = 2,04$ setzt, Quelle: [BŠB07]

Der Marktpreis des Risikos

Preis und Dynamik eines HDD-Futures hängen natürlich von der Wahl des Parameters θ ab, dem Marktpreis des Risikos, der in der Funktion $d(t, \tau, x)$ vorkommt. Um θ zu bestimmen, vergleicht man die am Markt beobachteten HDD-Future-Preise mit den nach Lemma 3.1.1 theoretisch errechneten Preisen. Dann kann man den Marktpreis des Risikos θ schätzen.

Abbildung 3.1 zeigt die HDD-Future-Preise zur Zeit 0 für jeden Monat des Folgejahres basierend auf dem angepassten Temperaturmodell Stockholms aus Abschnitt 2.3.1. Der Marktpreis des Risikos wurde gleich 0 gesetzt, d. h. $\theta = 0$. Die gestrichelten Linien zeigen die zugehörigen HDD-Preise, wenn man anstatt der Volatilität als Fourier-Reihe eine konstante Volatilität der Temperatur von $\bar{\sigma} = 2,04$ annimmt. Anhand der Unterschiede gerade in den Sommermonaten erkennt man, dass die Wahl des Modells für die Volatilität einen großen Einfluss auf die errechneten Preise hat.

Bewertung von CAT-Futures

Um den Preis eines Futures auf die $CAT(\tau_1, \tau_2)$ zu berechnen, betrachten wir zunächst die kumulierte Temperatur über ein Zeitintervall $[\tau_1, \tau_2]$ unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit \mathbb{Q}^θ :

Lemma 3.1.3. *Wenn die Temperatur T_t der Gleichung (3.8) folgt, ist die kumulierte Temperatur über das Zeitintervall $[\tau_1, \tau_2]$ explizit gegeben durch:*

$$\begin{aligned} CAT(\tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_t dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_t dt - \frac{1}{\kappa}(T_0 - s_0)(e^{-\kappa\tau_2} - e^{-\kappa\tau_1}) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_0^{\tau_2} \theta_t \left(e^{-\kappa(\tau_2-t)} - \mathbb{1}_{[0, \tau_1]}(t)e^{-\kappa(\tau_1-t)} - \mathbb{1}_{[\tau_1, \tau_2]}(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_0^{\tau_2} \sigma_t \left(e^{-\kappa(\tau_2-t)} - \mathbb{1}_{[0, \tau_1]}(t)e^{-\kappa(\tau_1-t)} - \mathbb{1}_{[\tau_1, \tau_2]}(t) \right) d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Wir wenden dieses Ergebnis an, um den CAT-Future-Preis zu berechnen.

Lemma 3.1.4. *Der CAT-Future-Preis $F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ zur Zeit $t \leq \tau_1$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_u \, du \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u \, du + \frac{1}{\kappa} (T_t - s_t) \left(e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)} \right) + \Theta(t; \tau_1, \tau_2), \end{aligned}$$

wobei $\Theta(t; \tau_1, \tau_2)$ gegeben ist als eine Funktion des Marktpreises des Risikos durch:

$$\Theta(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\kappa} \int_t^{\tau_2} \theta_u \left(1 - e^{-\kappa(\tau_2-u)} \right) \, du - \frac{1}{\kappa} \int_t^{\tau_1} \theta_u \left(1 - e^{-\kappa(\tau_1-u)} \right) \, du.$$

Für die Dynamik des CAT-Future-Preises $dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ erhält man:

$$dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \Sigma(t; \tau_1, \tau_2) \, d\tilde{W}_t, \quad (3.11)$$

wobei

$$\Sigma(t; \tau_1, \tau_2) := \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)} \right) \sigma_t.$$

Man kann $\Sigma(t; \tau_1, \tau_2)$ als die Termstruktur der Volatilität der CAT-Future-Dynamik interpretieren.

Bewertung von CAT-Call-Optionen

Da der CAT-Future-Preis ein additiver Gauß-Prozess ist, kann man leicht eine explizite Formel für eine Call-Option, geschrieben auf einen Future-Vertrag mit Ausübungszeitpunkt T und Strike K , bekommen.

Lemma 3.1.5. *Der Preis einer Call-Option zur Zeit t auf einen CAT-Future-Vertrag mit Ausübungszeitpunkt T , $t \leq T \leq \tau_1$, und Strike $K \geq 0$ ist gegeben durch:*

$$C_{\text{CAT}}(t) = e^{-r(T-t)} \left(F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K \right) \Phi(d) + \frac{\Sigma_{t,T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}, \quad (3.12)$$

wobei

$$d = \frac{F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K}{\Sigma_{t,T}}, \quad \Sigma_{t,T}^2 := \int_t^T \Sigma^2(u; \tau_1, \tau_2) \, du.$$

Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und $\Sigma(t; \tau_1, \tau_2)$ wie oben definiert.

Ebenso kann man den Preis von Futures auf den PRIM-Index und Call-Optionen auf PRIM-Futures erhalten.

II. Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit stückweise konstanter Varianz

Dieser Abschnitt untersucht die Bewertung von Wetterderivaten auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells mit Mean-Reversion und stückweise konstanter Varianz nach Alaton/Djehiche/Stillberger [ADS02] aus Abschnitt 2.3.1. Die Berechnung der Preise erfolgt ähnlich wie im vorherigen Abschnitt, allerdings verwenden die Autoren einige Näherungen, so dass sie dann explizit Preise berechnen können. Den Marktpreis des Risikos θ nehmen sie als konstant an, kommen aber gegen Ende zu dem Schluss, dass diese Annahme nicht richtig sein kann.

3.1 Bewertung und Absicherung auf Basis eines Wettermodells

In Abschnitt 2.3.1 hatten wir für die Temperaturentwicklung dT_t , $t \geq 0$, folgendes Modell mit monatlich konstanter Standardabweichung σ_t angegeben (siehe Gleichung 2.7):

$$dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dW_t. \quad (3.13)$$

Da der Markt für Wetterderivate unvollständig ist, muss man einen Marktpreis des Risikos θ hinzufügen, um einheitliche Preise für solche Verträge zu erhalten. Da es noch keinen wirklichen Markt gibt, von dem man Preise ableiten könnte, wird zur Vereinfachung angenommen, dass der Marktpreis des Risikos konstant ist.

Dann genügt der Preis-Prozess von T_t unter dem risikoneutralen Martingal-Maß \mathbb{Q}^θ , charakterisiert durch den Marktpreis des Risikos θ , der folgenden Dynamik:

$$dT_t = ds_t + (\theta\sigma_t - \kappa(T_t - s_t)) dt + \sigma_t d\tilde{W}_t,$$

wobei $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ unter \mathbb{Q}^θ eine Brownsche Bewegung ist.

T_t ist unter \mathbb{Q}^θ normalverteilt mit Erwartungswert

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_s] = s_t + (T_s - s_s)e^{-\kappa(t-s)} - \int_s^t \theta\sigma_u e^{-\kappa(t-u)} du \quad (3.14)$$

und Varianz

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_s] = \int_s^t \sigma_u^2 e^{-2\kappa(t-u)} du, \quad (3.15)$$

wobei $t \geq s \geq 0$.

Rechnet man jetzt die Integrale aus auf einem Intervall, auf dem $\sigma_t \equiv \sigma_i$, $i \in \{1, \dots, 12\}$, konstant ist, erhält man für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_s] &= s_t + (T_s - s_s)e^{-\kappa(t-s)} - \int_s^t \theta\sigma_i e^{-\kappa(t-u)} du \\ &= s_t + (T_s - s_s)e^{-\kappa(t-s)} - \frac{\theta\sigma_i}{\kappa} e^{-\kappa(t-u)} \Big|_s^t \\ &= s_t + (T_s - s_s)e^{-\kappa(t-s)} - \frac{\theta\sigma_i}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)}), \end{aligned}$$

und für die Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_s] &= \int_s^t \sigma_i^2 e^{-2\kappa(t-u)} du \\ &= \frac{\sigma_i^2}{2\kappa} \cdot e^{-2\kappa(t-u)} \Big|_s^t \\ &= \frac{\sigma_i^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}). \end{aligned}$$

Angenommen, t_1 und t_n bezeichnen den ersten und letzten Tag eines Monats und man startet den Prozess zu einer Zeit t_0 im Monat vor $[t_1, t_n]$. Um für diesen Fall den Erwartungswert und die Varianz von T_t zu berechnen, unterteilt man die Integrale aus (3.14) und (3.15) in zwei Integrale auf den Intervallen $[t_0, t_1]$ und $[t_1, t]$, in denen σ_i und σ_j jeweils konstant sind mit

$i, j \in \{1, \dots, 12\}$, $i \neq j$. Dann erhält man für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_{t_0}] &= s_t + (T_{t_0} - s_{t_0})e^{-\kappa(t-t_0)} - \int_{t_0}^t \theta \sigma_u e^{-\kappa(t-u)} du \\
 &= s_t + (T_{t_0} - s_{t_0})e^{-\kappa(t-t_0)} - \left[\int_{t_0}^{t_1} \theta \sigma_i e^{-\kappa(t-u)} du + \int_{t_1}^t \theta \sigma_j e^{-\kappa(t-u)} du \right] \\
 &= s_t + (T_{t_0} - s_{t_0})e^{-\kappa(t-t_0)} - \left[\frac{\theta \sigma_i e^{-\kappa t}}{\kappa} \cdot e^{\kappa u} \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\theta \sigma_j e^{-\kappa t}}{\kappa} \cdot e^{\kappa u} \Big|_{t_1}^t \right] \\
 &= s_t + (T_{t_0} - s_{t_0})e^{-\kappa(t-t_0)} - \frac{\theta}{\kappa} (\sigma_i - \sigma_j) e^{-\kappa(t-t_1)} + \frac{\theta}{\kappa} \sigma_i e^{-\kappa(t-t_0)} - \frac{\theta}{\kappa} \sigma_j, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

und die Varianz:

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_t | \mathcal{F}_{t_0}] = \frac{1}{2\kappa} (\sigma_i^2 - \sigma_j^2) e^{-2\kappa(t-t_1)} - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa} e^{-2\kappa(t-t_0)} + \frac{\sigma_j^2}{2\kappa}. \quad (3.17)$$

Bewertung von HDD-Call-Optionen

Wir betrachten eine Call-Option auf Heating-Degree-Days: Die Auszahlung ist von der Form

$$\mathcal{X} = \max(\text{HDD}(t_1, t_n) - K, 0) \quad (3.18)$$

mit Strike $K \geq 0$ und

$$\text{HDD}(t_1, t_n) = \sum_{i=t_1}^{t_n} \max(\rho - T_i, 0). \quad (3.19)$$

T_t ist unter \mathbb{Q}^θ normalverteilt:

$$T_t \sim \mathcal{N}(\mu_t, \nu_t),$$

wobei μ_t durch (3.16) und ν_t durch (3.17) gegeben sind. Die Maximumsfunktion in (3.19) erschwert die Berechnung einer Formel für den Preis. Allerdings kann man die folgende Näherung verwenden.

In Stockholm ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Wintertag die tägliche Durchschnittstemperatur über 18°C liegt, also $\max(18 - T_i, 0) = 0$, extrem klein. Wenn man den Preis eines Vertrages bestimmen möchte, dessen Auszahlung von der Summe der HDDs in Stockholm einer Periode im Winter, z. B. dem Monat Januar, abhängt, kann man für einen solchen Vertrag näherungsweise schreiben:

$$\text{HDD}(t_1, t_n) = \sum_{i=t_1}^{t_n} \max(18 - T_i, 0) \approx \sum_{i=t_1}^{t_n} 18 - T_i = 18n - \sum_{i=t_1}^{t_n} T_i. \quad (3.20)$$

Hiervon kann man nun einfacher die Verteilung bestimmen. Die T_i , $i = t_1, \dots, t_n$, sind Pfade eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, der ein Gauß-Prozess ist. Das bedeutet, dass der Vektor $(T_{t_1}, T_{t_2}, \dots, T_{t_n})$ Gaußsch ist. Da die Summe in (3.20) eine Linearkombination der Elemente dieses Vektors ist, ist $\text{HDD}(t_1, t_n)$ ebenfalls Gaußsch. Jetzt muss man nur noch den Erwartungswert und die Varianz von $\text{HDD}(t_1, t_n)$ berechnen:

Für $t < t_1$ sind Erwartungswert und Varianz gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\text{HDD}(t_1, t_n) | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[18n - \sum_{i=t_1}^{t_n} T_i \Big| \mathcal{F}_t \right] = 18n - \sum_{i=t_1}^{t_n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [T_i | \mathcal{F}_t], \\
 \text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [\text{HDD}(t_1, t_n) | \mathcal{F}_t] &= \sum_{i=t_1}^{t_n} \text{Var} [T_i | \mathcal{F}_t] + 2 \sum_{i < j} \text{Cov} [T_i, T_j | \mathcal{F}_t].
 \end{aligned}$$

Angenommen, die obigen Berechnungen seien durchgeführt mit den Ergebnissen:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\text{HDD}(t_1, t_n) | \mathcal{F}_t] =: \mu_n \text{ und } \text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta} [\text{HDD}(t_1, t_n) | \mathcal{F}_t] =: \Sigma_n^2.$$

Dann ist $\text{HDD}(t_1, t_n) \mathcal{N}(\mu_n, \Sigma_n)$ -verteilt und der **Preis der Call-Option** (3.18) gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_{\text{HDD}}(t) &= e^{-r(t_n-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(\text{HDD}(t_1, t_n) - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(t_n-t)} \int_K^\infty (x - K) \cdot f_{\text{HDD}(t_1, t_n)}(x) dx \\ &= e^{-r(t_n-t)} \left((\mu_n - K) \Phi(-\alpha_n) + \frac{\Sigma_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha_n^2}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei $\alpha_n = (K - \mu_n)/\Sigma_n$ und $f_{\text{HDD}(t_1, t_n)}$ die Dichte von $\text{HDD}(t_1, t_n)$ und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnen.

Bewertung von HDD-Put-Optionen

Analog kann eine Formel für den Preis einer Put-Option auf Heating-Degree-Days hergeleitet werden. Der Payoff einer HDD-Put-Option ist gegeben durch:

$$\mathcal{Y} = \max(K - \text{HDD}(t_1, t_n), 0).$$

Der **Preis der Put-Option** ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} P_{\text{HDD}}(t) &= e^{-r(t_n-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(K - \text{HDD}(t_1, t_n), 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(t_n-t)} \int_0^K (K - x) \cdot f_{\text{HDD}(t_1, t_n)}(x) dx \\ &= e^{-r(t_n-t)} \left[(K - \mu_n) \left(\Phi(\alpha_n) - \Phi\left(-\frac{\mu_n}{\Sigma_n}\right) \right) + \frac{\Sigma_n}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{\Sigma_n^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\Sigma_n}\right)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Es ist zu beachten, dass die Formeln (3.21) und (3.22) in erster Linie für Verträge während der Winterperiode (typischerweise die Periode November bis März) in Stockholm gelten. Während des Sommers und in anderen Städten können diese Formeln nicht ohne Einschränkung genutzt werden, denn die hier verwendete Näherung $\max(18 - T_i, 0) \neq 0$ gilt nicht mehr, wenn die Durchschnittstemperatur nahe an 18 °C oder sogar darüber liegt.

Der Marktpreis des Risikos

Um Temperatur-Trajektorien unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q}^θ zu simulieren, muss der Marktpreis des Risikos θ bestimmt werden. Oben wurde die Annahme getroffen, dass diese Größe konstant sei. Um eine Schätzung für θ zu finden, kann man auf die Marktpreise anderer Verträge schauen und herausfinden, mit welchem Wert von θ man einen zum Marktpreis passenden Preis errechnen kann. Allerdings gibt es noch keinen voll entwickelten Wetterderivate-Markt für Verträge schwedischer Städte. Der heutige „Markt“ besteht aus einer Zahl von Akteuren, die Preise von Optionen und anderen Derivaten anbieten. Einer dieser Akteure, Scandic Energy, nennt Preise für einige Optionen. Diese sind allerdings keine Marktangebote und sollten nur als Anhaltspunkte dienen. Es sind „Preise“ von HDD-Call-Optionen für Januar und Februar verfügbar (Details siehe Abbildung 3.2). Die Prämien Anfang Dezember 2000 für Option I und II waren 25 SEK und 45 SEK. Wenn man das hier dargestellte Modell und $\theta = 0$ verwendet, erhält man Prämien in Höhe von 29 SEK für beide Verträge. Daraus kann man schließen, dass die Preise der Verträge nicht mit demselben Marktpreis des Risikos bestimmt wurden. Der Preis von 25 SEK der Option I würde zu einem negativen Wert von θ führen, der von 45 SEK der Option II zu $\theta \approx 0,08$. Aus diesen Werten geht hervor, dass die Annahme eines konstanten Marktpreises des Risikos nicht zutreffend ist.

<i>Parameter</i>	<i>Option I</i>	<i>Option II</i>
Wetterstation	Bromma Airport	Bromma Airport
Index	HDD	HDD
Typ	Call-Option	Call-Option
Periode	Januar 2001	Februar 2001
Strike	600 HDDs	540 HDDs
Nominal	1 SEK/HDD	1 SEK/HDD
Max. Auszahlung	200 SEK	200 SEK
Prämie	25 SEK	45 SEK

Abbildung 3.2: Die genauen Daten der beiden HDD-Optionen, Quelle: [ADS02]

3.1.2 Fraktionales Ornstein-Uhlenbeck-Modell

Benth verwendet in [Ben03] das fraktionale Ornstein-Uhlenbeck-Modell von Brody/Syroka/Zerovos aus Abschnitt 2.3.2, um Preise von Temperaturderivaten zu bestimmen.

Nach Gleichung (2.12) folgt die Tagestemperatur der Gleichung

$$T_t = T_0 + \int_0^t \kappa_u (s_u - T_u) du + \int_0^t \sigma_u dW_u^H.$$

Betrachte die fraktionale Girsanov-Transformation (siehe Satz 1.2.19)

$$\tilde{W}_t^H = \int_0^t \frac{\kappa_s}{\sigma_s} \theta_s ds + W_t^H,$$

wobei $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Funktion mit Träger auf $[0, T]$ ist, so dass eine Funktion $\Theta = (\Theta_t)_{t \geq 0}$ mit Träger auf $[0, T]$ existiert, die die Integralgleichung $\int_0^T \Theta_s \phi(s, t) ds = \frac{\kappa_t}{\sigma_t} \theta_t$ für $0 \leq t \leq T$ löst. $\phi(s, t)$ wurde im Satz 1.2.19 definiert als $\phi(s, t) = H(2H - 1)|s - t|^{2H-2}$, $s, t \geq 0$. Bezeichne \mathbb{Q}^θ das Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem \tilde{W}^H eine fraktionale Brownsche Bewegung ist. Dann folgt T_t unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q}^θ der Gleichung:

$$T_t = T_0 + \int_0^t \kappa_u (s_u + \theta_u - T_u) du + \int_0^t \sigma_u d\tilde{W}_u^H.$$

Wie in Abschnitt 2.3.2 kann man jetzt die explizite Temperaturentwicklung unter dem Maß \mathbb{Q}^θ berechnen (vgl. Gleichung (2.13)):

$$T_t = e^{-\int_0^t \kappa_v dv} \left(T_0 + \int_0^t \kappa_u (s_u + \theta_u) e^{\int_0^u \kappa_v dv} du \right) + \int_0^t \sigma_u e^{-\int_u^t \kappa_v dv} d\tilde{W}_u^H. \quad (3.23)$$

Die Funktion θ ist der Marktpreis des Risikos und die Dynamik von T_t unter \mathbb{Q}^θ die risikoneutrale Dynamik.

Der folgende Satz gibt eine Klasse von arbitragefreien Preisentwicklungen für Contingent Claims X auf die Temperatur an.

Satz 3.1.6. *Sei \mathcal{F}_t^H die von W_s^H , $s \leq t$, erzeugte σ -Algebra und X ein Contingent Claim auf die Temperatur. Sei \mathbb{Q}^θ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, gegeben durch die fraktionale Girsanov-Transformation, und $Y \in L^2(\mathbb{Q}^\theta)$. Ein arbitragefreier Preis $F_X(t)$ von X zur Zeit $t \in [0, T]$ ist gegeben durch:*

$$F_X(t) = e^{-r(T-t)} \hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}^\theta} [X | \mathcal{F}_t^H],$$

wobei $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{Q}^\theta}$ die (quasi-bedingte) Erwartung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}^θ bezeichnet.

Der Begriff der quasi-bedingten Erwartung wird in Benth [Ben03] mithilfe des fraktionalen Chaos-Expansions-Theorems und des Theorems der Quasi-Martingal-Darstellung eingeführt. Zur Erklärung sei außerdem auf Hu/Øksendal [HØ99] und Duncan/Hu/Pasik-Duncan [DHPD00] verwiesen. Wir gehen hier auf diese Begriffe und die dahinterstehende Theorie nicht weiter ein. Das folgende Lemma zeigt, wie man die quasi-bedingte Erwartung bei der Bewertung von Temperaturderivaten berechnen kann.

Lemma 3.1.7. *Sei $b \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ (Definition siehe Satz 1.2.19). Definiere die Funktion*

$$p_{t,T}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\Phi(t,T)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\Phi(t,T)}\right)$$

mit $\Phi(t,T) := |b \mathbf{1}_{[0,T]}|_\phi^2 - |b \mathbf{1}_{[0,t]}|_\phi^2$. Angenommen, $f \in L^2(\mathbb{R}, p_{0,T}(x) dx)$, dann gilt:

$$\hat{\mathbb{E}} \left[f \left(\int_0^T b(s) dW_s^H \right) \middle| \mathcal{F}_t^H \right] = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_{t,T} \left(\int_0^t b(s) dW_s^H - y \right) dy.$$

Mit diesem Lemma kann man den Preis eines europäischen Claims mit Auszahlungsfunktion $f(T_t)$ bestimmen. Hierzu definieren wir mit Blick auf Gleichung (3.23):

$$a_T := e^{-\int_0^T \kappa_v dv} \left(T_0 + \int_0^T \kappa_u (s_u + \theta_u) e^{\int_0^u \kappa_v dv} du \right),$$

$$b_T(u) := \sigma_u e^{-\int_u^T \kappa_v dv}.$$

Unter der Annahme, dass $f(a_T + \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, p_{0,T}(x) dx)$, wobei $p_{t,T}$ in Lemma 3.1.7 gegeben ist, erhält man nach Satz 3.1.6 und Lemma 3.1.7 für den arbitragefreien Preis eines europäischen Claims X unter \mathbb{Q}^θ :

$$F_X(t) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot p_{t,T} \left(a_T + \int_0^t b_T(u) d\tilde{W}_u^H - y \right) dy.$$

Mit Ausdruck (3.23) kann man herleiten, dass

$$a_T + \int_0^t b_T(u) d\tilde{W}_u^H = c(t,T) + e^{-\int_t^T \kappa_v dv} T_t,$$

wobei

$$c(t,T) := e^{-\int_0^t \kappa_u du} \int_t^T \kappa_u (s_u + \theta_u) e^{\int_0^u \kappa_v dv} du.$$

Für den Preis eines europäischen Claims X unter \mathbb{Q}^θ ergibt sich dann:

$$F_X(t) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot p_{t,T} \left(c(t,T) + e^{-\int_t^T \kappa_v dv} T_t - y \right) dy.$$

Beachte, dass man damit den Preis zur Zeit t als eine Funktion der Zeit t , der Maturität T und der gegenwärtigen Temperatur T_t darstellen kann.

Die Auszahlungsfunktionen einer Call-Option $f(x) = \max(x - K, 0)$ und einer Put-Option $f(x) = \max(K - x, 0)$ genügen der Integrierbarkeitsbedingung $f(a_T + \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, p_{0,T}(x) dx)$.

Bewertung von HDD-/CDD-Futures

Brody/Syroka/Zervos [BSZ02] berechnen den Preis eines HDD-Futures ebenfalls auf Basis des Modells der Temperatur als fraktionaler Ornstein-Uhlenbeck-Prozess aus Abschnitt 2.3.2. Sie verwenden die „klassische“ bedingte Erwartung anstelle der quasi-bedingten Erwartung. Der einzige Moment, wo bedingte und quasi-bedingte Erwartung übereinstimmen, ist, wenn man den Preis zur Zeit 0 betrachtet (siehe [Ben03]).

Die Auszahlung sei proportional zum HDD-Index über einen Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$. Der Erwartungswert der diskontierten Auszahlung ist zur Zeit 0 gegeben durch:

$$v(T, x) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta T} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(18 - T_t, 0) dt \right],$$

wobei der Diskontierungsfaktor δ eine positive Konstante ist, die den Zinssatz und den Marktpreis des Risikos berücksichtigt. Die Erwartung wird bezüglich des „normalen“ Wahrscheinlichkeitsmaßes berechnet.

Lemma 3.1.8. *Seien κ , s_t und σ beschränkte, deterministische Funktionen. Dann ergibt sich für den Preis eines Futures, geschrieben auf den HDD-Index auf $[\tau_1, \tau_2]$:*

$$F_{\text{HDD}}(t) = e^{-rT} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left((18 - \mu_t) \Phi \left(\frac{18 - \mu_t}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \sqrt{\frac{\Sigma_t}{2\pi}} \exp \left(-\frac{(18 - \mu_t)^2}{2\Sigma_t} \right) \right) dt,$$

wobei der Erwartungswert der Temperatur μ_t durch Gleichung (2.14) und die Varianz Σ_t durch Gleichung (2.15) gegeben sind und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung darstellt.

Analog ergibt sich für den Wert eines CDD-Futures:

$$F_{\text{CDD}}(t) = e^{-rT} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left((\mu_t - 18) \Phi \left(\frac{\mu_t - 18}{\sqrt{\Sigma_t}} \right) + \sqrt{\frac{\Sigma_t}{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\mu_t - 18)^2}{2\Sigma_t} \right) \right) dt.$$

3.1.3 Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modell

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Bewertung von Temperaturderivaten auf Basis des Modells des Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses von Benth/Šaltytė-Benth [BŠB05] aus Abschnitt 2.3.3.

Bewertung von CAT-Futures

Wir betrachten Futures, die auf der CAT über eine bestimmte Periode $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 < \tau_2$, basieren. Die Temperaturdynamik folge dem Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modell aus Gleichung (2.16):

$$dT_t = ds_t - \kappa(T_t - s_t) dt + \sigma_t dL_t,$$

wobei L_t ein Lévy-Prozess ist und L_1 endliche exponentielle Momente hat.

Nach Gleichung (3.5) ist der Preis eines Futures auf den CAT-Index auf dem Intervall $[\tau_1, \tau_2]$ zur Zeit t gegeben durch:

$$F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Um einen expliziten Ausdruck für den Future-Preis zu bekommen, müssen wir wieder das risikoneutrale Maß \mathbb{Q} genauer bestimmen. Wir betrachten eine Unterfamilie der Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbb{Q} , indem wir die Esscher-Transformation benutzen. Angenommen, θ ist eine reellwertige, beschränkte und messbare Funktion. Wir betrachten den stochastischen Prozess

$$Z_t^\theta = \exp \left(\int_0^t \theta_s \, dL_s - \int_0^t \phi(\theta_s) \, ds \right),$$

wobei $\phi(\lambda)$ den Logarithmus der momentenerzeugenden Funktion von L_t darstellt, d. h. $\phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[\exp(\lambda L_1)]$. Der Prozess Z_t^θ ist eine Dichte unter bestimmten Integrabilitätsbedingungen an das Lévy-Maß ℓ . Eine genaue Beschreibung der in diesem Modell erfüllten Bedingungen findet sich bei Benth/Šaltytė-Benth [BŠB04].

Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}^θ ist definiert durch die Esscher-Transformation:

$$\mathbb{Q}^\theta(A) = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A Z_{t_{\max}}^\theta \right],$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion ist und t_{\max} wie oben ein fester Zeithorizont jenseits aller relevanten Handelszeitpunkte. Durch das zeitlich veränderliche θ erhalten wir wieder eine flexible Klasse von Martingalmaßen \mathbb{Q}^θ , die leicht angepasst werden können. Beachte, dass für den Fall, dass der Lévy-Prozess L eine Brownsche Bewegung ist, die Esscher-Transformation der Girsanov-Transformation aus Abschnitt 3.1.1 entspricht.

Für die Preise von CAT-Futures erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 3.1.9. *Der Future-Preis $F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ zur Zeit $t \leq \tau_1$, basierend auf der CAT über dem Intervall $[\tau_1, \tau_2]$ ist gegeben durch:*

$$F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u \, du + \frac{1}{\kappa} (T_t - s_t) \left(e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)} \right) + \Theta(t; \tau_1, \tau_2),$$

wobei $\Theta(t; \tau_1, \tau_2)$ als eine Funktion des Marktpreises des Risikos und der Volatilität gegeben ist durch:

$$\Theta(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\kappa} \int_t^{\tau_2} \phi'(\theta_u) \sigma_u \left(1 - e^{-\kappa(\tau_2-u)} \right) \, du - \frac{1}{\kappa} \int_t^{\tau_1} \phi'(\theta_u) \sigma_u \left(1 - e^{-\kappa(\tau_1-u)} \right) \, du.$$

Die Dynamik von $F(t; \tau_1, \tau_2)$ ist gegeben durch:

$$dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \Sigma(t; \tau_1, \tau_2) \, dL_t,$$

wobei die Funktion $\Sigma(t; \tau_1, \tau_2)$ definiert ist als:

$$\Sigma(t; \tau_1, \tau_2) := \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)} \right) \sigma_t$$

und als Termstruktur der Volatilität der CAT-Future-Dynamik interpretiert werden kann.

Ein Vergleich der Formeln für den CAT-Future-Preis und die CAT-Future-Dynamik mit den Ergebnissen auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells aus Abschnitt 3.1.1 ist in Abschnitt 3.1.5 zu finden.

Bewertung von CAT-Call-Optionen

Im Fall von $L = W$, d. h. Brownscher Dynamiken, stimmt die Esscher-Transformation mit einer Girsanov-Transformation überein und unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß wird die Future-Dynamik ein additiver Prozess ohne Drift, der durch

$$dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \Sigma(t; \tau_1, \tau_1) d\tilde{W}_t$$

gegeben ist (analog zu Gleichung (3.11)). Hierbei ist \tilde{W} eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q}^θ . Indem man die Gauß-Struktur der Verteilung von F nutzt, kann man in diesem Fall eine explizite Bewertungsformel für eine Call-Option herleiten, die auf den Future-Vertrag mit Ausübungszeit T , $t \leq T \leq \tau_1$, und Ausübungspreis K geschrieben ist. Es ergibt sich die Formel (3.12) aus Lemma 3.1.5 für den Preis einer Call-Option auf ein CAT-Future:

$$C_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = e^{-r(T-t)} (F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K) \Phi(d) + \frac{\Sigma_{t,T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}.$$

$C_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ ist unabhängig vom Marktpreis des Risikos θ , was zu erwarten war, da man für $L = W$ die Option komplett absichern kann, indem man den zugrundeliegenden Future-Vertrag verwendet.

Modelliert man allerdings die Temperaturdynamiken allgemein mit einem Lévy-Prozess, muss man den Ausdruck

$$C_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(F_{\text{CAT}}(T, \tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t] \quad (3.24)$$

berechnen, der von der Präzisierung von θ abhängt. In diesem Fall führt der Lévy-Prozess zur Unvollständigkeit des Marktes, so dass Hedging der Option nicht mehr möglich ist. Man erhält viele arbitragefreie Preise, die durch θ parametrisiert sind. Den Marktpreis des Risikos kann man bestimmen, indem man die nach Satz 3.1.9 berechneten theoretischen Future-Preise an die beobachteten historischen Preise anpasst. Die Erwartung in Gleichung (3.24) berechnet man mit numerischer Integration oder Monte-Carlo-Simulation. Dafür muss man die Verteilungseigenschaften der Zufallsvariablen T_T (also der Temperatur zur Maturität) kennen bzw. äquivalent die der Zufallsvariablen

$$Y_T := \int_0^T \sigma_u e^{\kappa(T-u)} dL_u$$

bezüglich \mathbb{Q}^θ . Nach Benth [Ben03] ist die Kumulantenfunktion Ψ von Y_T gegeben durch:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\exp(i\lambda Y_T)] = \exp(\Psi(\lambda))$$

mit

$$\Psi(\lambda) := \int_0^T \psi \left(\lambda \sigma_t e^{\kappa(T-t)} - i\theta_t \right) dt - \int_0^T \psi(-i\theta_t) dt,$$

wobei ψ die Kumulantenfunktion von L_1 darstellt. Für den Fall der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung ist die momentenerzeugende Funktion ϕ und somit auch die charakteristische Funktion $\psi(\lambda) = \phi(i\lambda)$ bekannt. Die Verteilung des gegebenen Modells (z. B. der verallgemeinerten hyperbolischen Klasse) kann man dann durch numerische Inversion der charakteristischen Funktion Ψ erhalten.

3.1.4 CAR(p)-Modell

In den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5 wurden CAR(p)-Modelle für die Temperatur und die Windgeschwindigkeit aufgestellt, für die wir jetzt die Bewertung von Derivaten untersuchen. Wir beginnen mit dem CAR(p)-Modell für die Temperatur.

I. Die Temperatur als CAR(p)-Prozess

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Bewertung von Temperaturderivaten auf Grundlage des CAR-Temperaturmodells aus Abschnitt 2.3.4 von Benth/Šaltytė-Benth/Koekebakker [BŠBK07].

Dort wurde die Temperatur T_t , $t \geq 0$, modelliert als $T_t = s_t + X_t^1$ mit

$$d\mathbf{X}_t = A \mathbf{X}_t dt + \mathbf{e}_p \sigma_t dW_t$$

(vgl. die Gleichungen (2.17) und (2.18)).

Sei θ eine reellwertige, messbare, beschränkte und messbare Funktion auf $[0, t_{\max}]$ und

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t \theta_u du, \quad 0 \leq t \leq t_{\max}.$$

Nach dem Satz von Girsanov existiert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, bezeichnet als \mathbb{Q}^θ , so dass \tilde{W} eine Brownsche Bewegung für $t \in [0, t_{\max}]$ ist. Die Dynamik von \mathbf{X}_t unter \mathbb{Q}^θ ist gegeben durch:

$$d\mathbf{X}_t = (A\mathbf{X}_t + \mathbf{e}_p \sigma_t \theta_t) dt + \mathbf{e}_p \sigma_t d\tilde{W}_t.$$

Als explizite Lösung unter \mathbb{Q}^θ ergibt sich für $t \geq 0$ und $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{X}_t = e^{At} \mathbf{x} + \int_0^t \sigma_u \theta_u e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p du + \int_0^t \sigma_u e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p d\tilde{W}_u. \quad (3.25)$$

Bewertung von CAT-Futures

Nach Gleichung (3.5) ist der CAT-Future-Preis gegeben durch:

$$F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_u du \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Das nächste Lemma gibt explizit den CAT-Future-Preis an.

Lemma 3.1.10. *Der CAT-Future-Preis für $0 \leq t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u du + \mathbf{a}(t; \tau_1, \tau_2) \mathbf{X}_t \\ &\quad + \int_t^{\tau_1} \theta_u \sigma_u \mathbf{a}(u; \tau_1, \tau_2) \mathbf{e}_p du \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta_u \sigma_u \mathbf{e}'_1 A^{-1} \left(e^{A(\tau_2-u)} - I_p \right) \mathbf{e}_p du, \end{aligned}$$

wobei I_p die $p \times p$ -Einheitsmatrix ist, \mathbf{e}_p der p -te Einheitsvektor und

$$\mathbf{a}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbf{e}'_1 A^{-1} \left(e^{A(\tau_2-t)} - e^{A(\tau_1-t)} \right).$$

Der CAT-Future-Preis aus Lemma 3.1.10 ist gegeben durch die aggregierte Durchschnittstemperatur über den Messzeitraum plus einer gewichteten Mean-Reversion-Abhängigkeit von \mathbf{X}_t . Die Temperatur ist also abhängig von der heutigen Temperatur T_t und der aller vorherigen Tage T_{t-k} bis zur Verzögerung $k \leq p$. Die beiden letzten Terme glätten den Marktpreis des Risikos über eine Periode von heute (Zeit t) bis zum Ende der Messperiode, mit einem Wechsel zur Zeit τ_1 . Die Matrix A entspricht dem Parameter κ aus den vorherigen Abschnitten der eindimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Modelle.

Die Dynamik unter \mathbb{Q}^θ ist gegeben durch das folgende Lemma:

Lemma 3.1.11. *Die Dynamik von $F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ unter \mathbb{Q}^θ ist gegeben durch:*

$$dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \Sigma_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) d\tilde{W}_t,$$

wobei

$$\Sigma_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \sigma_t e_1' A^{-1} \left(e^{A(\tau_2-t)} - e^{A(\tau_1-t)} \right) e_p$$

die Volatilitätsfunktion darstellt und \tilde{W}_t unter \mathbb{Q}^θ eine Brownsche Bewegung ist.

Ein Vergleich der Formeln für den CAT-Future-Preis und die CAT-Future-Dynamik mit den Ergebnissen auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells aus Abschnitt 3.1.1 und des Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modells aus Abschnitt 3.1.3 ist in Abschnitt 3.1.5 zu finden.

Bewertung von CAT-Call-Optionen

Der Preis eines CAT-Futures zur Zeit T kann für $0 \leq t \leq T \leq \tau_1 \leq \tau_2$ geschrieben werden als:

$$F_{\text{CAT}}(T; \tau_1, \tau_2) = F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) + \int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}(u; \tau_1, \tau_2) d\tilde{W}_u.$$

Daraus folgt, dass $F_{\text{CAT}}(T; \tau_1, \tau_2)$, bedingt an $F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$, normalverteilt ist mit Mittelwert $F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$ und Varianz $\int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}^2(u; \tau_1, \tau_2) du$. Dann gilt für eine Call-Option auf CAT-Futures mit Ausübungszeitpunkt T und Strike K :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(F_{\text{CAT}}(T; \tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\max \left(F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K + \int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}(u; \tau_1, \tau_2) d\tilde{W}_u, 0 \right) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\max \left(x - K + \int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}(u; \tau_1, \tau_2) d\tilde{W}_u, 0 \right) \right]_{x=F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Preis einer Call-Option auf Futures folgendes Lemma:

Lemma 3.1.12. *Der Preis zur Zeit $t \leq T$ einer Call-Option auf ein CAT-Future mit Messperiode $[\tau_1, \tau_2]$, Strike K und Ausübungszeit $T \leq \tau_1$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} C_{\text{CAT}}(t; T, \tau_1, \tau_2) &= e^{-r(T-t)} \left((F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K) \Phi(d(t; T, \tau_1, \tau_2)) \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}^2(u; \tau_1, \tau_2) du \Phi'(d(t; T, \tau_1, \tau_2)) \right), \end{aligned}$$

wobei

$$d(t; T, \tau_1, \tau_2) := \frac{F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) - K}{\sqrt{\int_t^T \Sigma_{\text{CAT}}^2(u; \tau_1, \tau_2) du}}$$

ist und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Absicherung von CAT-Call-Optionen

Die Absicherungs-Strategie für diese Call-Option mit dem zugrundeliegenden CAT-Future kann durch das Delta der Option gefunden werden, d. h. die Sensitivität des Optionspreises bezüglich des zugrundeliegenden CAT-Future-Preises, definiert als die erste Ableitung des Optionspreises nach dem Wert des Basiswertes (siehe Abschnitt 1.1.5). Dieses Delta-Hedge-Verhältnis liefert eine Zahl von CAT-Futures, die im Hedging-Portfolio gehalten werden sollten, um die Call-Option vollständig zu replizieren.

Lemma 3.1.13. *Das Delta der Call-Option (oder das Hedge-Verhältnis) ist gegeben durch:*

$$\Delta = \frac{\partial C_{\text{CAT}}(t; T, \tau_1, \tau_2)}{\partial F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)} = \Phi(d(t; T, \tau_1, \tau_2)),$$

wobei d in Lemma 3.1.12 definiert ist und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung darstellt.

Wie bereits in Abschnitt 1.1.5 erwähnt ist das Delta eine Zahl zwischen 0 und 1. Wie erwartet sollten fast keine (nahe null) CAT-Futures gehalten werden, wenn die Option weit „aus dem Geld“ ist. Im entgegengesetzten Fall sollten viele (nahe bei eins) CAT-Futures gehalten werden.

Bewertung von CDD-Futures

Wir betrachten jetzt die Preise von Futures, die auf den CDD-Index geschrieben sind. Dabei werden wir die explizite CDD-Future-Preisdynamik angeben und Bewertung und Absicherung von Optionen auf diese Verträge diskutieren. Mithilfe der HDD-CDD-Parität (Gleichung (3.7)) kann man dann auch die HDD-Future-Preise bestimmen.

Nach Gleichung (3.4) ist der Preis eines CDD-Futures gegeben durch:

$$\begin{aligned} F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T_u - \rho, 0) du \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(s_u + \mathbf{e}'_1 \mathbf{X}_u - \rho, 0) \mid \mathcal{F}_t] du. \end{aligned}$$

Unter \mathbb{Q}^θ gilt nach Gleichung (3.25):

$$\mathbf{X}_t = \exp(At)\mathbf{x} + \int_0^t \sigma_u \theta_u e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p du + \int_0^t \sigma_u e^{A(t-u)} \mathbf{e}_p d\tilde{W}_u,$$

was normalverteilt ist. Damit ist auch $s_t + \mathbf{e}'_1 \mathbf{X}_t - \rho$ normalverteilt mit Mittelwert

$$m(t, u, \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \cdot \mathbf{X}_t)$$

und Varianz $v^2(t, u)$, die im folgenden Lemma über CDD-Future-Preise definiert werden.

Lemma 3.1.14. *Der Preis eines CDD-Futures ist für $0 \leq t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ gegeben durch:*

$$F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} v(t, u) \Psi \left(\frac{m(t, u, \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{X}_t)}{v(t, u)} \right) du,$$

wobei

$$\begin{aligned} m(t, u, \mathbf{x}) &:= s_u + \int_t^u \sigma_v \theta_v \mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p dv + \mathbf{x} - \rho, \\ v^2(t, u) &:= \int_t^u \sigma_v^2 (\mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p)^2 dv \end{aligned}$$

und $\Psi(x) := x\Phi(x) + \Phi'(x)$. Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Das folgende Lemma gibt die Dynamik des CDD-Future-Preises an.

Lemma 3.1.15. *Die Dynamik von $F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$ für $0 \leq t \leq \tau_1$ unter \mathbb{Q}^θ ist gegeben durch:*

$$dF_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \sigma_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{e}_p \cdot \Phi \left(\frac{m(t, u, \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{X}_t)}{v(t, u)} \right) du d\tilde{W}_t,$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die Termstruktur der Volatilität für CDD-Futures ist definiert als:

$$\Sigma_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) := \sigma_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{e}_p \Phi \left(\frac{m(t, u, \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{X}_t)}{v(t, u)} \right) du. \quad (3.26)$$

Die Volatilität ist jetzt abhängig von \mathbf{X}_t , was das Analogon in stetiger Zeit zur heutigen (desaisonalisierten) Temperatur und zu allen verzögerten (desaisonalisierten) Temperaturen bis zur Zeit $t - p$ ist.

Bewertung von CDD-Call-Optionen

Wir geben jetzt noch einen Ausdruck für den Preis einer Call-Option an, geschrieben auf CDD-Futures. Der Ausdruck ist nicht analytisch, aber geeignet für eine Monte-Carlo-Simulation.

Betrachte eine Call-Option auf ein CDD-Future auf $[\tau_1, \tau_2]$ mit Strike K und Ausübungszeit $T \leq \tau_1$. Um die Notation etwas zu vereinfachen, führen wir die Funktion

$$\tilde{\Psi}(t, u, x) := \Psi \left(\frac{m(t, u, x)}{v(t, u)} \right)$$

ein, wobei Ψ in Lemma 3.1.14 definiert wurde. Das folgende Resultat liefert den Preis einer CDD-Future-Option zur Zeit $t \leq T$:

Lemma 3.1.16. *Der Preis zur Zeit $t \leq T$ einer Call-Option, geschrieben auf ein CDD-Future für $[\tau_1, \tau_2]$ mit Strike K und Ausübungszeit $T \leq \tau_1$ ist gegeben durch:*

$$C_{\text{CDD}}(t; T, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\max \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(T, u) \tilde{\Psi}(T, u, \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{x} + \int_t^T \mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p \sigma_v \theta_v dv + \Sigma(u, t, T) Y) du - K, 0 \right) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_t}.$$

Hierbei ist

$$\Sigma^2(u, t, T) := \int_t^T (\mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p)^2 \sigma_v^2 dv$$

und Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

Absicherung von CDD-Call-Optionen

Das folgende Lemma gibt die Hedging-Strategie H_{CDD} einer Call-Option auf ein CDD-Future an.

Lemma 3.1.17. *Angenommen, $\Sigma_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$ aus Gleichung (3.26) ist ungleich null für fast alle $t \in [0, T]$. Dann ist die Hedging-Strategie H_{CDD} gegeben durch:*

$$H_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{\sigma_t}{\Sigma_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2)} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(T, u) \tilde{\Psi}(T, u, Z) du > K\right)} \cdot \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{e}_p \Phi \left(\frac{m(T, u, Z)}{v(T, u)} \right) du \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_t}$$

für $t \leq T$, wobei Z eine normalverteilte Zufallsvariable ist mit Mittelwert

$$\mathbf{e}'_1 e^{A(u-t)} \mathbf{x} + \int_t^T \mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p \sigma_v \theta_v dv$$

und Varianz

$$\int_t^T \sigma_v^2 \left(\mathbf{e}'_1 e^{A(u-v)} \mathbf{e}_p \right)^2 dv.$$

Wie schon für den Preis der CDD-Option benötigt man auch für die Berechnung der Absicherung eine numerische Auswertung der Erwartung. Die geschieht leicht mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation.

Abschließend untersuchen wir, wann die Bedingung aus Lemma 3.1.17 erfüllt ist, dass die Funktion $\Sigma_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$ aus Gleichung (3.26) nicht null ist. In Abschnitt 2.3.4 wurde $\sigma_t > 0$ definiert. Das gleiche gilt für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ . Σ_{CDD} kann also nur null sein, wenn

$$g(u) := \mathbf{e}'_1 e^{Au} \mathbf{e}_p$$

null ist.

Beachte, dass $g(0) = 0$. Mit den für Stockholm geschätzten Parametern der Matrix A (siehe Abschnitt 2.3.4) ist $g(u)$ strikt positiv für alle $u > 0$ und konvergiert gegen null für $u \rightarrow \infty$. Deshalb ist in diesem Fall Σ_{CDD} strikt positiv und die Bedingung für das obige Lemma erfüllt. Allgemein ist die Funktion g ungleich null, wenn die Eigenwerte der Matrix A in Tripel $(\lambda_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i)$ zerlegt werden können, wobei jedes γ_i einen strikt positiven Imaginärteil hat und jedes λ_i reell und größer oder gleich dem Realteil von γ_i ist. Eine hinreichende Bedingung ist, dass alle Eigenwerte reell und negativ sind. Außerdem ist es eine notwendige Bedingung, dass es einen reellen Eigenwert von A gibt, der größer oder gleich dem Realteil aller anderen Eigenwerte von A ist.

II. Die Windgeschwindigkeit als CAR(p)-Prozess

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Bewertung von Windderivaten auf Basis des Modells der Windgeschwindigkeit als CAR(p)-Prozess von Benth/Šaltytė-Benth [BŠB09] aus Abschnitt 2.3.5. Dort hatten wir die Windgeschwindigkeit $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ folgendermaßen modelliert (siehe Gleichungen (2.19) und (2.20)):

$$V_t = \begin{cases} (\lambda (s_t + X_t^1) + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \exp(s_t + X_t^1), & \lambda = 0, \end{cases}$$

mit

$$d\mathbf{X}_t = A \mathbf{X}_t dt + \mathbf{e}_p \sigma_t dW_t.$$

Bewertung von Wind-Futures

Die Wind-Futures, die an der US Futures Exchange gehandelt werden, basieren auf dem Nordix-Index über einen Zeitraum von τ_1 bis τ_2 , $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \leq \tau_2$, (siehe Def. 1.1.11):

$$N(\tau_1, \tau_2) = 100 + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} V(\tau) - v_{20}(\tau),$$

wobei $V(\tau)$ die durchschnittliche Windgeschwindigkeit am Tag τ bezeichnet und $v_{20}(\tau)$ die durchschnittliche Windgeschwindigkeit am Tag τ der letzten 20 Jahre.

Der Preis $F(t; \tau_1, \tau_2)$ eines Futures zur Zeit $t < \tau_1$ auf den Nordix-Index $N(\tau_1, \tau_2)$ ist gegeben durch:

$$F_N(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [N(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t]. \quad (3.27)$$

Dabei ist \mathbb{Q}^θ ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß und θ eine quadratisch integrierbare Funktion auf $[0, T]$. Sei der Prozess \tilde{W} definiert durch

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_u du.$$

Durch die quadratische Integrierbarkeit von θ ist die Novikov-Bedingung erfüllt und nach dem Satz von Girsanov (Satz 1.2.17) existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}^θ , so dass \tilde{W} eine Brownsche Bewegung ist unter \mathbb{Q}^θ .

Unter dem Maß \mathbb{Q}^θ hat \mathbf{X}_t die folgende Dynamik:

$$d\mathbf{X}_t = (A \mathbf{X}_t + \mathbf{e}_p \sigma_t \theta_t) dt + \mathbf{e}_p \sigma_t d\tilde{W}_t.$$

Für $0 \leq t \leq \tau \leq T$ ergibt sich folgende explizite Dynamik:

$$\mathbf{X}_\tau = e^{A(\tau-t)} \mathbf{x} + \int_t^\tau e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u \theta_u du + \int_t^\tau e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u d\tilde{W}_u. \quad (3.28)$$

Insbesondere ist X_τ^1 , gegeben $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}$, $\tau \geq t$, normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu_\theta(t, \tau, \mathbf{x}) := \mathbf{e}_1' e^{A(\tau-t)} \mathbf{x} + \int_t^\tau (\mathbf{e}_1' e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p) \sigma_u \theta_u du \quad (3.29)$$

und Varianz

$$\Sigma^2(t, \tau) := \int_t^\tau \sigma_u^2 (\mathbf{e}_1' e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p)^2 du. \quad (3.30)$$

Für den Preis eines Futures auf den Nordix-Index ergibt sich nach Gleichung (3.27) und der Definition 1.1.11:

$$F_N(t; \tau_1, \tau_2) = \bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [V(\tau) | \mathcal{F}_t], \quad (3.31)$$

wobei

$$\bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) := 100 - \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} v_{20}(\tau).$$

Um den Preis eines Windfutures zu berechnen, muss man die bedingte Erwartung von $V(\tau)$, gegeben \mathcal{F}_t , für $\tau \geq t$ berechnen.

Lemma 3.1.18. Sei $0 \leq t \leq \tau \leq T$. Dann gilt für $0 < \lambda \leq 1$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [V(\tau)|\mathcal{F}_t] = M_{\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \lambda(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t)), \lambda^2 \Sigma^2(t, \tau) \right),$$

wobei $M_k(a, b^2)$ das k -te Moment einer normalverteilten Zufallsvariable mit Mittelwert a und Varianz b^2 ist. Für $\lambda = 0$ erhält man:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [V(\tau)|\mathcal{F}_t] = \exp \left(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \Sigma^2(t, \tau) \right).$$

Die Funktionen $\mu_\theta(t, i, \mathbf{x})$ und $\Sigma^2(t, i)$ wurden in Gleichung (3.29) bzw. (3.30) definiert.

Mit Lemma 3.1.18 und Gleichung (3.31) ergibt sich für den Future-Preis:

$$F_N(t; \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} M_{\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \lambda(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t)), \lambda^2 \Sigma^2(t, \tau) \right), & \lambda \in (0, 1], \\ \bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \exp \left(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \Sigma^2(t, \tau) \right), & \lambda = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Bewertung von Wind-Call-Optionen

Wir berechnen jetzt noch den Preis einer europäischen Call-Option auf Wind-Futures mit Ausübungszeitpunkt $T > \tau_1$ und Strike $K > 0$.

Der arbitragefreie Preis einer solchen Option ist für $t \leq T$ und Zinsrate r gegeben durch:

$$C_N(t; T, K, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(F_N(T; \tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t].$$

Mit den Gleichungen (3.28) und (3.32) ergibt sich für $\mu_\theta(T, \tau, \mathbf{X}_T)$:

$$\begin{aligned} \mu_\theta(T, \tau, \mathbf{X}_T) &= \mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-T)} \mathbf{X}_T + \int_T^\tau \left(\mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p \right) \sigma_u \theta_u du \\ &= \mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-t)} \mathbf{X}_t + \mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-T)} \int_t^T e^{A(T-u)} \mathbf{e}_p \sigma_u \theta_u du \\ &\quad + \int_T^\tau \left(\mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p \right) \sigma_u \theta_u du \\ &\quad + \mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-T)} \int_t^T \sigma_u e^{A(T-u)} \mathbf{e}_p d\tilde{W}_u \\ &= \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t) + \int_t^T \sigma_u \mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p d\tilde{W}_u. \end{aligned}$$

Das Itô-Integral ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\mathbb{V}^2(t, T, \tau) = \int_t^T \sigma_u^2 \left(\mathbf{e}'_1 e^{A(\tau-u)} \mathbf{e}_p \right)^2 du.$$

Dann erhält man, dass

$$\mu_\theta(T, \tau, \mathbf{X}_T) \stackrel{d}{=} \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{X}_t) + \mathbb{V}(t, T, \tau) Z$$

mit Gleichheit in Verteilung und einer standardnormalverteilten Zufallsvariable Z .

Sei die Funktion $h_\lambda : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert als:

$$h_\lambda(\mathbf{x}, z) := \begin{cases} \bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} M_{\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \lambda(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{x}) + \mathbb{V}(t, T, \tau) \cdot z), \lambda^2 \Sigma^2(T, \tau) \right), & \lambda \in (0, 1], \\ \bar{v}_{20}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \exp \left(s_\tau + \mu_\theta(t, \tau, \mathbf{x}) + \mathbb{V}(t, T, \tau) \cdot z + \frac{1}{2} \Sigma^2(T, \tau) \right), & \lambda = 0. \end{cases}$$

Dann ist der Preis einer Call-Option gegeben durch:

$$C(t; T, K, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta} [\max(h_\lambda(\mathbf{x}, Z) - K, 0)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_t}.$$

Diese Darstellung eignet sich für numerische Berechnungen anhand der Monte-Carlo-Simulation.

3.1.5 Vergleich der CAT-Future-Preise und -Dynamiken

In den vorherigen Abschnitten wurden auf Basis verschiedener Wettermodelle die Preise von Futures berechnet. Wir vergleichen jetzt die CAT-Future-Preise und die Preisdynamiken, die auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells (Abschnitt 3.1.1), des Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modells (Abschnitt 3.1.3) und des CAR(p)-Modells (Abschnitt 3.1.4) berechnet wurden. Am Ende dieses Abschnitts werden wir die Preise und ihre Dynamiken in einer Formel zusammenfassen.

In den einzelnen Abschnitten hatten wir für die CAT-Future-Preise folgende Ergebnisse erhalten²:

$$F_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u du + \kappa^{-1} (e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)}) (T_t - s_t) + \Theta_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2),$$

$$F_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u du + \kappa^{-1} (e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)}) (T_t - s_t) + \Theta_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2),$$

$$F_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u du + (-\mathbf{e}'_1) A^{-1} (e^{A(\tau_1-t)} - e^{A(\tau_2-t)}) \mathbf{X}_t + \Theta_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2).$$

Dabei sind die Funktionen $\Theta(t; \tau_1, \tau_2)$ für die Modelle wie folgt gegeben:

$$\Theta_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_t^{\tau_2} \theta_u \kappa^{-1} (1 - e^{-\kappa(\tau_2-u)}) du - \int_t^{\tau_1} \theta_u \kappa^{-1} (1 - e^{-\kappa(\tau_1-u)}) du,$$

$$\Theta_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_t^{\tau_2} \phi'(\theta_u) \sigma_u \kappa^{-1} (1 - e^{-\kappa(\tau_2-u)}) du - \int_t^{\tau_1} \phi'(\theta_u) \sigma_u \kappa^{-1} (1 - e^{-\kappa(\tau_1-u)}) du,$$

$$\Theta_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_t^{\tau_2} \theta_u \sigma_u (-\mathbf{e}'_1) A^{-1} (I_p - e^{A(\tau_2-u)}) \mathbf{e}_p du - \int_t^{\tau_1} \theta_u \sigma_u (-\mathbf{e}'_1) A^{-1} (I_p - e^{A(\tau_1-u)}) \mathbf{e}_p du.$$

Die Preise weisen große strukturelle Gemeinsamkeiten auf: Sie beginnen mit dem Integral von τ_1 bis τ_2 über die Saisonalität. Dann folgt ein Term, der die Mean-Reversion berücksichtigt. Der Mean-Reversion-Parameter κ im eindimensionalen Fall entspricht dabei der Matrix A im mehrdimensionalen Fall. Die Vorzeichen von κ und A hängen vom Modell ab und können entsprechend angeglichen werden. Die Faktoren $(e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)})$ und $(e^{A(\tau_1-t)} - e^{A(\tau_2-t)})$ sind also analog. Die Funktionen Θ bestehen aus der Differenz zweier Integrale über eine Funktion $f(\theta, \sigma)$ und einen Mean-Reversions-Term. Die $p \times p$ -Einheitsmatrix I_p entspricht der 1 im eindimensionalen Fall, ebenso reduzieren sich der erste Einheitsvektor \mathbf{e}_1 und der p -te Einheitsvektor \mathbf{e}_p im Eindimensionalen zu 1.

Damit lassen sich diese Formeln zu einer Formel für den CAT-Future-Preis zusammenfassen:

$$F_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s_u du + \mathbf{e}'_1 (-R^{-1}) (e^{R(\tau_1-t)} - e^{R(\tau_2-t)}) \mathbf{X}_t + \Theta_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2)$$

mit

$$\Theta_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_t^{\tau_2} f(\theta_u, \sigma_u) \mathbf{e}'_1 (-R^{-1}) (I_p - e^{R(\tau_2-u)}) \mathbf{e}_p du - \int_t^{\tau_1} f(\theta_u, \sigma_u) \mathbf{e}'_1 (-R^{-1}) (I_p - e^{R(\tau_1-u)}) \mathbf{e}_p du.$$

²Die Indizes der Preise wurden geändert, da jetzt nicht mehr zwischen verschiedenen Wetterindizes unterschieden wird, sondern zwischen den den CAT-Futures zugrundeliegenden Temperaturmodellen. Außerdem wurden die Formeln zur Vereinheitlichung etwas umgeformt.

Dabei steht die $p \times p$ -Matrix $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ für die Parameter der Mean-Reversion. Im Fall von $p = 1$ reduziert sie sich zu einem Wert, der in den eindimensionalen Ornstein-Uhlenbeck-Modellen $\kappa \in \mathbb{R}$ genannt wurde. Der Vektor \mathbf{X}_t reduziert sich im Eindimensionalen zu $T_t - s_t$ (siehe Gleichung (2.17)). Die Funktion $f(\theta_u, \sigma_u)$ ist gegeben durch:

$$f(\theta_u, \sigma_u) = \begin{cases} \theta_u & \text{im Ornstein-Uhlenbeck-Modell,} \\ \phi'(\theta_u)\sigma_u & \text{im Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modell,} \\ \theta_u\sigma_u & \text{im CAR}(p)\text{-Modell.} \end{cases}$$

$\phi'(\theta)$ steht für die Ableitung der logarithmierten momentenerzeugenden Funktion von L_t (siehe Abschnitt 3.1.3).

Für die Temperaturdynamiken hatten wir folgende Formeln erhalten:

$$\begin{aligned} dF_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \Sigma_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2) & d\tilde{W}_t, \\ dF_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \Sigma_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2) & dL_t, \\ dF_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2) &= \Sigma_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2) & d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\Sigma(t; \tau_1, \tau_2)$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{OU}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \sigma_t \kappa^{-1} (e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)}), \\ \Sigma_{\text{Lévy-OU}}(t; \tau_1, \tau_2) &= \sigma_t \kappa^{-1} (e^{-\kappa(\tau_1-t)} - e^{-\kappa(\tau_2-t)}), \\ \Sigma_{\text{CAR}(p)}(t; \tau_1, \tau_2) &= \sigma_t \mathbf{e}'_1 (-A^{-1}) (e^{A(\tau_1-t)} - e^{A(\tau_2-t)}). \end{aligned}$$

Die Dynamiken sind also gegeben als das Produkt der Standardabweichung und eines Mean-Reversion-Terms sowie den antreibenden Prozess.

Auch diese Formeln lassen sich zu einer Formel für die CAT-Future-Preisdynamik zusammenfassen:

$$dF_{\text{CAT}}(t; \tau_1, \tau_2) = \sigma_t \mathbf{e}'_1 (-R^{-1}) (e^{R(\tau_1-t)} - e^{R(\tau_2-t)}) dX_t$$

Hierbei ist $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ wie oben die Mean-Reversion-Matrix und X_t der vom Modell abhängige antreibende Prozess, also eine Brownsche Bewegung oder allgemein ein Lévy-Prozess.

3.2 Nutzenorientierte Bewertung und Absicherung

Wir wenden uns jetzt der Bewertung von Wetterderivaten mithilfe von Nutzenfunktionen zu. Für die Definition einer Nutzenfunktion sei auf Def. 1.3.25 verwiesen sowie auf die Definitionen 1.3.26 bis 1.3.28, die spezielle Nutzenfunktionen angeben.

3.2.1 Schattenpreise

Dieser Abschnitt basiert auf der Arbeit von Davis³ [Dav01]. Er verwendet die Konzepte der „Schattenpreise“ oder der „Grenzrate der Substitution“ aus den Wirtschaftswissenschaften, um die Preise von Wetterderivaten zu bestimmen.

Wir gehen davon aus, dass ein Gaslieferant seine Einnahmen mit einem Derivat auf den HDD-Index $(X_t)_{t \geq 0}$ absichern möchte. Die Menge verkauften Gases pro Zeiteinheit lasse sich als eine

³Department of Mathematics, Imperial College London, London, UK

3 Bewertung und Absicherung

Funktion in Abhängigkeit der HDDs darstellen, die linear sei: $v(t) = \alpha X_t$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Sei $(S_t)_{t \geq 0}$ der Spot-Preis, zu dem der Anbieter das Gas verkauft. Dann lässt sich sein Profit schreiben als:

$$Y_t = \alpha X_t S_t. \quad (3.33)$$

Seien $W = (W_t)_{t \geq 0}$ und $W' = (W'_t)_{t \geq 0}$ zwei Standard-Brownsche Bewegungen mit Korrelation ρ . Die HDDs $X = (X_t)_{t \geq 0}$ werden als geometrische Brownsche Bewegung (siehe Def. 1.2.13) modelliert⁴:

$$dX_t = \nu X_t dt + \gamma X_t dW_t \quad (3.34)$$

mit $\nu \in \mathbb{R}$ und $\gamma > 0$.

Damit gilt zur Maturität $T \geq 0$:

$$X_T = X_0 \cdot \exp\left(\left(\nu - \frac{1}{2}\gamma^2\right)T + \gamma W_T\right). \quad (3.35)$$

Auch der Spot-Preis $S = (S_t)_{t \geq 0}$ wird als geometrische Brownsche Bewegung modelliert:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW'_t \quad (3.36)$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Definiere mit $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ eine weitere Brownsche Bewegung:

$$d\tilde{W}_t = \frac{1}{\xi} (\gamma dW_t + \sigma dW'_t)$$

mit $\xi := \sqrt{\gamma^2 + \sigma^2 + 2\rho\gamma\sigma}$.

Der Profit $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ genügt nach Gleichung (3.33) mit (3.34) und (3.36) der Gleichung

$$dY_t = \theta Y_t dt + \xi Y_t d\tilde{W}_t \quad (3.37)$$

mit $Y_0 = \alpha S_0 X_0$, wobei $\theta := \nu + \mu + \rho\sigma\gamma$ und ξ wie oben.

Angenommen, das Wetterderivat habe zur Zeit T den Ausübungswert

$$\begin{aligned} C(X_T) &= \lambda \cdot \max\{X_T - K, 0\} \text{ für eine Call-Option,} \\ P(X_T) &= \lambda \cdot \max\{K - X_T, 0\} \text{ für eine Put-Option} \end{aligned}$$

mit Strike K und Auszahlungsbetrag λ für jeden HDD über dem Strike.

Sei $U = (U_t)_{t \geq 0}$ eine Nutzenfunktion (siehe Def. 1.3.25) und $H = (H_t)_{t \geq 0}$ der Wert des Portfolios eines Investors. $V(x)$ sei eine für alle $x \in \mathbb{R}_+$ differenzierbare Funktion mit $V'(x) > 0$. Wir betrachten einen Investor, der den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}[U(H_T)]$ seines Portfolio-Wertes H_T zur Zeit T maximieren will. Nach Davis [Dav97] ist der faire Preis dann gegeben durch:

$$\hat{p} = \frac{\mathbb{E}[U'(H_T^*)C(X_T)]}{V'(\eta)}, \quad (3.38)$$

wobei H_T^* ein optimales Portfolio von handelbaren Anlagen mit Anfangsausstattung η und $V(\eta) = \mathbb{E}[U(H_T^*)]$ ist. Hierbei ist $H_T^* = Y_T$, da der Produzent keine Investitionsmöglichkeiten hat. Er produziert bis zum Niveau der aktuellen Nachfrage und verkauft zum Marktpreis.

⁴Davis zeigt in seiner Arbeit anhand von Temperaturdaten in Birmingham (England) von 1988 bis 1998, dass dieses Modell zutreffend ist.

Logarithmischer Nutzen

Wir nehmen an, dass der Nutzen logarithmisch vom Typ CRRA ist, $U(y) = \log y$, also $U(Y_T) = \log(Y_T)$ und $U'(Y_T) = \frac{1}{Y_T}$. Es ist leicht zu sehen, dass $V(y) = \log y + \text{const.}$ Deshalb ist $V'(y) = \frac{1}{y}$ und die Bewertungsformel (3.38) ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\hat{p} = \frac{\mathbb{E}[U'(H_T^*)C(X_T)]}{V'(\eta)} = \frac{\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y_T}C(X_T)\right]}{\frac{1}{\eta}} = \mathbb{E}\left[\frac{Y_0}{Y_T}C(X_T)\right]. \quad (3.39)$$

Sei $Z_t := \frac{Y_0}{Y_t}$. Dann gilt:

$$dZ_t = -rZ_t dt - \xi Z_t d\tilde{W}_t, \quad Z_0 = 1,$$

mit $r = \mu + \nu - \gamma^2 - \sigma^2 - \rho\sigma\gamma$. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \mathbb{E}\left[e^{rT} \exp(-\xi^2 T/2 - \xi \tilde{W}_T) C(X_T)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\hat{P}}\left[e^{-rT} | C(X_T)\right], \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{E}_{\hat{P}}$ die Erwartung unter dem Maß \hat{P} darstellt, definiert durch:

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = \exp\left(-\xi^2 T/2 - \xi \tilde{W}_T\right). \quad (3.40)$$

Die Korrelation zwischen \tilde{W}_t und W_t ist $\rho_1 = (\gamma + \rho\sigma)/\xi$ und $d\hat{W}_t = d\tilde{W}_t + \xi dt$ ist eine Brownsche Bewegung unter \hat{P} . Daraus folgt, dass unter \hat{P} eine Brownsche Bewegung \hat{W}' existiert, so dass

$$dX_t = (\nu - \rho_1\gamma\xi)X_t dt + \gamma X_t d\hat{W}'_t. \quad (3.41)$$

Die „Drift“ ist gegeben durch $\nu - \rho_1\gamma\xi = \nu - \gamma^2 - \rho\sigma\gamma = r - q$ mit $q = \mu - \sigma^2$. Für den Optionswert ergibt sich aus den Gleichungen (3.40) und (3.41) das folgende Lemma:

Lemma 3.2.1. *Der Optionswert (3.39) ist nach der Black-Scholes-Formel⁵ gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \text{BS}(x_0, K, r, q, \gamma, T) \\ &= \begin{cases} e^{-qT} (X_0 \Phi(d_1) - K e^{-(r-q)T} \Phi(d_2)) & \text{für eine Call-Option,} \\ e^{-qT} (-X_0 \Phi(-d_1) + K e^{-(r-q)T} \Phi(-d_2)) & \text{für eine Put-Option} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.42)$$

mit

$$\begin{aligned} r &= \mu + \nu - \gamma^2 - \sigma^2 - \rho\sigma\gamma, \\ q &= \mu - \sigma^2, \\ d_1 &= \frac{\log\left(\frac{X_0}{K}\right) + (r - q + \frac{\gamma^2}{2})T}{\gamma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \gamma\sqrt{T}, \\ \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

⁵Das Black-Scholes-Modell wurde in Abschnitt 1.3.2 kurz vorgestellt. Dabei wurden die Preise von Call- (Satz 1.3.23) und Put-Optionen (Satz 1.3.24) angegeben. Für das hier verwendete, erweiterte Black-Scholes-Modell mit Dividenden sei auf Shiryaev [Shi99] verwiesen.

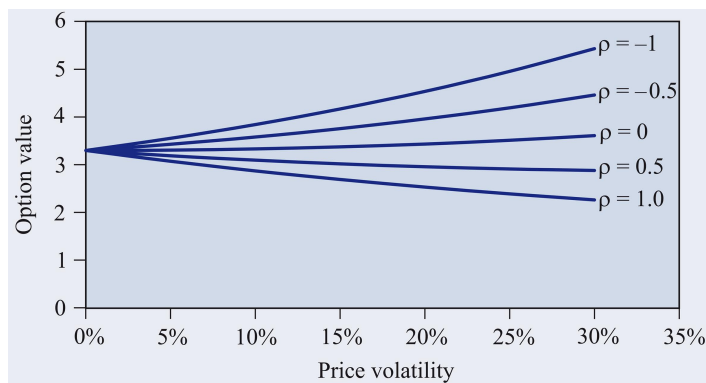


Abbildung 3.3: Optionswerte als Funktion der Preisvolatilität σ für verschiedene Korrelationswerte ρ , Quelle: [Dav01]

Weitere Nutzenfunktionen

Emoto/Misawa⁶ [EM07] untersuchen die Optionspreise auch noch für andere Nutzenfunktionen. Allerdings ist es schwierig, diese explizit zu bestimmen. Die Autoren geben jedoch Formeln für Optionspreise an, die für numerische Berechnungen geeignet sind. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

Nutzenfunktion	Optionspreis
HARA: $U(Y) = \frac{1}{b-1}(a + bY)^{1-\frac{1}{b}}$	$\frac{\mathbb{E} \left[(a+bY_T)^{-\frac{1}{b}} C(X_T) \right]}{\mathbb{E} \left[(a+bY_T)^{-\frac{1}{b}} \left(\frac{Y_T}{y} \right) \right]}$
Logarithmisch: $U(Y) = \log(a + Y)$	$\frac{\mathbb{E} \left[\frac{1}{a+Y_T} C(X_T) \right]}{\mathbb{E} \left[\frac{1}{a+Y_T} \left(\frac{Y_T}{y} \right) \right]}$
Exponentiell: $U(Y) = -e^{-\frac{Y}{a}}$	$\frac{\mathbb{E} \left[e^{-\frac{1}{a} Y_T} C(X_T) \right]}{\mathbb{E} \left[e^{-\frac{1}{a} Y_T} \left(\frac{Y_T}{y} \right) \right]}$

Beispiel

Davis verdeutlicht anhand eines Beispiels den Einfluss der Preisvolatilität σ und der Korrelation ρ auf den Optionspreis. Er betrachtet eine Call-Option auf HDDs für Mai 2001, abgeschlossen am 1. November 2000 mit Strike $K = 560$. Aus Simulationen ist bekannt, dass der Mittelwert und die Standardabweichung der HDDs im Mai 577 bzw. 35 sind.

Wenn man $X_0 = 560$ wählt, folgt daraus $\nu = -0,13\%$. Für den Preisprozess wird $\mu = 0$ gesetzt, also keine Drift des Preises. Allerdings hängt der Wert der Option signifikant von der Volatilität des Preises ab (siehe Abbildung 3.3).

Unter dem Maß \hat{P} hat X_t die Drift $r - q = \nu - \gamma^2 - \rho\sigma\gamma$, wobei der Diskontfaktor $r = \nu - \gamma^2 - \rho\sigma\gamma + \mu - \sigma^2$ ist. Wenn $\rho = 0$ ist, ist die Drift unabhängig von σ und der Optionspreis steigt mit σ , da der Diskontfaktor sinkt. Für $\rho > 0$ fallen Drift und Diskontfaktor mit steigender Volatilität σ , weshalb der Optionspreis sinkt. Bei $\rho < 0$ führen eine wachsende Drift und ein sinkender Diskontfaktor zu steigendem Optionspreis.

⁶beide Faculty of Economics, Nagoya City University, Nagoya, Japan

3.2.2 Indifferenzpreis und Grenznutzen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Bewertung und Absicherung von Derivaten mit nicht handelbaren Basiswerten nach Ankirchner/Imkeller/Reis⁷ [AIR07].

Das Modell

Sei $d \in \mathbb{N}$ und W eine d -dimensionale Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Wir bezeichnen mit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die Vervollständigung der durch W erzeugten Filtration. Ein Derivat mit Maturität $T > 0$ basiere auf einem \mathbb{R}^m -dimensionalen, nicht handelbaren Index R_t (z. B. einem Wetterindex) mit Dynamik

$$dR_t = b(t, R_t) dt + \rho(t, R_t) dW_t, \quad (3.43)$$

wobei $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\rho : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ messbare deterministische Funktionen sind. Wir nehmen an, dass ein $C \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $t \in [0, T]$ und $x, x' \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$(R1) \quad \begin{aligned} |b(t, x) - b(t, x')| + |\rho(t, x) - \rho(t, x')| &\leq C|x - x'|, \\ |b(t, x)| + |\rho(t, x)| &\leq C(1 + |x|). \end{aligned}$$

Ein Derivat sei von der Form $F(R_T)$, wobei $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Funktion ist. Beachte, dass der erwartete Payoff von $F(R_T)$ unter der Bedingung $R_t = r$ zur Zeit t gegeben ist durch $F(R_t^{t,r})$, wobei $R_t^{t,r}$ die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung

$$R_s^{t,r} = r + \int_t^s b(u, R_u^{t,r}) du + \int_t^s \rho(u, R_u^{t,r}) dW_u, \quad s \in [t, T], \quad (3.44)$$

darstellt.

Der zugehörige Finanzmarkt besteht aus k Risikoanleihen und einer nicht riskanten Anlage. Wir benutzen die risikolose Anlage als Numéraire und nehmen an, dass die Preise der Risikoanlagen sich in Einheiten des Numéraires entwickeln gemäß der stochastischen Differenzialgleichung

$$dS_t^i = S_t^i (\alpha_i(t, R_t) dt + \beta_i(t, R_t) dW_t), \quad i = 1, \dots, k,$$

wobei $\alpha_i(t, r)$ die i -te Komponente einer messbaren und vektorwertigen Abbildung $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\beta_i(t, r)$ die i -te Zeile einer messbaren und matrixwertigen Abbildung $\beta : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k \times d}$ sind. Beachte, dass W dieselbe \mathbb{R}^d -dimensionale Brownsche Bewegung ist wie die, die in Gleichung (3.43) den Index-Prozess antreibt. Damit ist die Korrelation zwischen dem Index und den handelbaren Anlagen bestimmt durch die Matrizen ρ und β .

Um Arbitrage-Möglichkeiten auf dem Finanzmarkt auszuschließen, sei $d \geq k$. Aus technischen Gründen gelten:

- (M1) α ist beschränkt.
- (M2) Es existieren Konstanten $0 < \epsilon < K$, so dass $\epsilon I_k \leq (\beta(t, r)\beta^*(t, r)) \leq K I_k$ für alle $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$,

wobei $\beta^*(t, r)$ die Transponierte von $\beta(t, r)$ ist und I_k die k -dimensionale Einheitsmatrix.

Reale Daten zeigen, dass die HDDs ungefähr lognormalverteilt sind und deshalb als geometrische Brownsche Bewegung modelliert werden können (wie schon in Abschnitt 3.2.1). Dies bedeutet, dass man in Gleichung (3.43) $b(t, R_t) = \alpha_1 R_t$ und $\rho(t, R_t) = \alpha_2 R_t$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ und $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ abhängig von der Jahreszeit wählt.

⁷alle Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin

Sei U die **exponentielle Nutzenfunktion** (vgl. Def. 1.3.28) mit Risikoaversion $\eta > 0$, d.h.

$$U(x) = -e^{-\eta x}.$$

Im Folgenden sei $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$. Eine **Investment-Strategie** ist ein vorhersehbarer Prozess $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ mit Werten in \mathbb{R}^k , so dass der Integral-Prozess $\int_0^t \lambda_r^i \frac{dS_r^i}{S_r^i}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ definiert ist. Wir interpretieren λ^i als den Wert des Teils des Portfolios, der in die i -te Anlage investiert wird. Da während des Zeitintervalls $[t, s]$ gehandelt wird, führt die Investitionsstrategie λ zu einem Gesamtgewinn in Höhe von

$$G_s^{\lambda, t} = \sum_{i=1}^k \int_t^s \lambda_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i}.$$

$G_s^{\lambda, t, r}$ bezeichne den Gewinn bedingt auf $R_t = r$.

Sei $\mathcal{A}^{t, r}$ die Menge aller Strategien λ , so dass $\mathbb{E} \left[\int_t^T |\lambda_s \beta(s, R_s^{t, r})|^2 ds \right] < \infty$ und dass die Familie $\left\{ e^{-\eta G_\tau^{\lambda, t, r}} : \tau \text{ ist eine Stoppzeit mit Werten in } [t, T] \right\}$ gleichmäßig integrierbar ist. Falls $\lambda \in \mathcal{A}^{t, r}$, dann heißt λ **zulässig**.

Maximaler erwarteter Nutzen und optimale Strategie

Der **maximale erwartete Nutzen** zur Zeit T , bedingt auf ein Vermögen von v zur Zeit t und den Index $R_t = r$, ist definiert als

$$V^0(t, v, r) = \sup \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\lambda, t, r} \right) \right] : \lambda \in \mathcal{A}^{t, r} \right\}.$$

Man kann zeigen, dass es eine Strategie π gibt, die **optimale Strategie**, so dass

$$\mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\pi, t, r} \right) \right] = V^0(t, v, r).$$

Aus der Konvexität der Nutzenfunktionen folgt, dass π auf $[t, T]$ fast sicher eindeutig ist. Mit Theorem 7 in Hu/Imkeller/Müller [HIM05] erhält man, dass $\pi \in \mathcal{A}^{t, r}$.

Angenommen, ein Investor ist ausgestattet mit einem Derivat $F(R_T)$ und hält es in seinem Depot bis zur Maturität T . Dann ist der maximale erwartete Nutzen gegeben durch den maximalen erwarteten Nutzen der Summe aus Anfangsvermögen v , Gewinn durch Investition $G_T^{\lambda, t, r}$ und Auszahlung des Derivats $F(R_T^{t, r})$:

$$V^F(t, v, r) = \sup \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\lambda, t, r} + F(R_T^{t, r}) \right) \right] : \lambda \in \mathcal{A}^{t, r} \right\}.$$

Auch im Fall mit Derivat existiert eine optimale Strategie, bezeichnet als $\hat{\pi}$, die

$$\mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\hat{\pi}, t, r} + F(R_T^{t, r}) \right) \right] = V^F(t, v, r)$$

genügt. Die Anwesenheit des Derivats $F(R_T)$ führt zu einem Wechsel der optimalen Strategie von π zu $\hat{\pi}$. Die Differenz

$$\Delta = \hat{\pi} - \pi \tag{3.45}$$

wird benötigt, um das mit dem Derivat im Portfolio verbundene Risiko – zumindest teilweise – abzusichern. Deshalb heißt Δ **Derivatsabsicherung** (*derivative hedge*).

Indifferenzpreis

Man kann leicht zeigen, dass für alle $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$ eine reelle Zahl $p(t, r)$ existiert, so dass für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$V^F(t, v - p(t, r), r) = V^0(t, v, r).$$

Wenn ein Investor den Preis $p(t, r)$ für das Derivat $F(R_T^{t,r})$ zahlen muss, ist er **indifferent**, das Derivat zu kaufen oder nicht. Deshalb heißt $p(t, r)$ der **Indifferenzpreis** zur Zeit t und zum Level r (vgl. auch Abschnitt 1.3.3).

Es stellt sich heraus, dass die Derivatsabsicherung Δ eng verbunden ist mit dem Indifferenzpreis des Derivats. Das Derivat verändert die Risikobelastung des Portfolios. Die Differenz zwischen $\hat{\pi}$ und π misst die Folgen auf F . Die Preis-Sensitivität, d.h. das Derivat von p relativ zur Indexentwicklung, ist ebenfalls ein Maß für die Veränderung von F und wird Veränderungsdruck genannt. Wir werden sehen, dass die Absicherung des Derivats in der Tat gleich der Preissensitivität multipliziert mit einigen Korrelations-Parametern ist.

Das Problem, die optimalen Strategien π and $\hat{\pi}$ zu finden, ist ein stochastisches Kontrollproblem. Man kann es dadurch bewältigen, dass man die zugehörige HJB-Gleichung löst, indem man ein Verifikations-Theorem benutzt und ein Eindeutigkeit-Ergebnis beweist (siehe Abschnitt 3.2.3 und Ankirchner/Imkeller/Popier [AIP07]). Hier jedoch wird ein stochastischer Ansatz verwendet. Man nutzt die Tatsache, dass man das stochastische Kontrollproblem lösen kann, indem man die Lösung einer stochastischen Rückwärts-Differenzialgleichung (BSDE, siehe Def. 1.2.15) bestimmt.

Lösen von stochastischen Kontrollproblemen mittels BSDE

Sei $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller \mathbb{R}^d -wertigen vorhersehbaren Prozesse ζ , so dass

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\zeta_t|^2 dt \right] < \infty,$$

und $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ die Menge aller \mathbb{R} -wertigen vorhersehbaren Prozesse δ , so dass

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |\delta_s|^2 \right] < \infty.$$

\mathcal{S}^∞ bezeichne die Menge aller beschränkten \mathbb{R} -wertigen vorhersehbaren Prozesse. Sei ξ \mathcal{F}_t -messbar und f eine vorhersehbare Abbildung definiert auf $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ mit Werten in \mathbb{R} .

Dann ist die **Lösung einer BSDE mit Endbedingung ξ und Generator f** gegeben durch ein Paar von Prozessen $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$, das folgender Gleichung genügt (vgl. Def. 1.2.15):

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds.$$

Wir kommen jetzt zurück zu unserem Kontrollproblem, die optimale Investitionsstrategie π bzw. $\hat{\pi}$ zu finden. Es ist bekannt, dass eine quadratische BSDE existiert, die diese Kontrollprobleme löst. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Generator der geeigneten BSDE, beginnend bei $\hat{\pi}$.

Wir setzen wieder $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$. Sei $\vartheta(t, r) = \beta^*(t, r)(\beta(t, r)\beta^*(t, r))^{-1}\alpha(t, r)$ und $C(t, r) = \{x\beta(t, r) : x \in \mathbb{R}^k\}$. Beachte, dass aus den Annahmen folgt, dass $\vartheta(t, r)$ beschränkt ist. Der Abstand eines Vektors $z \in \mathbb{R}^d$ zur abgeschlossenen und konvexen Menge $C(t, r)$ ist definiert als $\text{dist}(z, C(t, r)) := \min\{|z - u| : u \in C(t, r)\}$. Sei f die deterministische Funktion

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, r, z) \mapsto z\vartheta(t, r) + \frac{1}{2\eta}|\vartheta(t, r)|^2 - \frac{\eta}{2}\text{dist}^2\left(z + \frac{1}{\eta}\vartheta(t, r), C(t, r)\right).$$

f ist differenzierbar in z und genügt der Wachstumsbedingung

$$|f(t, r, z)| \leq c(1 + |z|^2) \quad \text{f. s.}$$

mit einem $c \in \mathbb{R}_+$. Die Wachstumsbedingung stellt sicher, dass es eine eindeutige Lösung $(\hat{Y}^{t,r}, \hat{Z}^{t,r}) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$ der BSDE gibt:

$$\hat{Y}_s^{t,r} = F(R_T^{t,r}) - \int_s^T \hat{Z}_u^{t,r} dW_u - \int_s^T f(u, R_u^{t,r}, \hat{Z}_u^{t,r}) du, \quad s \in [t, T]. \quad (3.46)$$

Beachte, dass die Endbedingung der BSDE von einer Standard-Vorwärts-SDE stammt. Das Gleichungssystem aus (3.44) und (3.46) wird auch **Vorwärts-Rückwärts-SDE** (*FBSDE, Forward-Backward Stochastic Differential Equation*) genannt.

Das bedingte, maximal erwartete Vermögen (oder die Wertfunktion des stochastischen Kontrollproblems) ist gleich dem Nutzen des Startpunktes der BSDE, d. h. (siehe [HIM05])

$$V^F(t, v, r) = -e^{-\eta(v - \hat{Y}_t^{t,r})}.$$

Bezeichne $\Pi_{C(t,r)}(z)$ die Projektion eines Vektors $z \in \mathbb{R}^d$ auf den linearen Unterraum $C(t, r)$. Falls $R_t = r$, genügt die optimale Strategie $\hat{\pi}_t$ auf $[t, T]$ der Gleichung

$$\hat{\pi}_s \beta(s, R_s^{t,r}) = \Pi_{C(t,r)} \left[\hat{Z}_s^{t,r} + \frac{1}{\eta} \vartheta(s, R_s^{t,r}) \right], \quad s \in [t, T].$$

Analog sei $(Y^{t,r}, Z^{t,r})$ die Lösung von

$$Y_s^{t,r} = - \int_s^T Z_u^{t,r} dW_u - \int_s^T f(u, R_u^{t,r}, Z_u^{t,r}) du, \quad s \in [t, T], \quad (3.47)$$

was ein stochastisches Kontrollproblem wie oben darstellt, nur ohne Derivat als Endbedingung, d. h. das Derivat ist nicht im Portfolio. In diesem Fall ist der maximale erwartete Nutzen

$$V^0(t, v, r) = -e^{-\eta(v - Y_t^{t,r})}$$

und die optimale Strategie π auf $[t, T]$ genügt

$$\pi_s \beta(s, R_s^{t,r}) = \Pi_{C(t,r)} \left[Z_s^{t,r} + \frac{1}{\eta} \vartheta(s, R_s^{t,r}) \right], \quad s \in [t, T].$$

Da $\Pi_{C(t,r)}$ ein linearer Operator ist, ist die Derivatsabsicherung gegeben durch die explizite Formel:

$$\Delta_s \beta(s, R_s^{t,r}) = \Pi_{C(t,r)} \left[\hat{Z}_s^{t,r} - Z_s^{t,r} \right].$$

Für $t \in [0, T]$ sei \mathcal{D}^m die σ -Algebra, die von den Funktionen $r \mapsto \mathbb{E} \left[\int_t^T \phi(s, R_s^{t,r}) ds \right]$ erzeugt wird, wobei ϕ eine beschränkte, stetige und reellwertige Funktion ist. Außerdem sei die Abbildung $(t, r) \mapsto \vartheta(t, r)$ Lipschitz-stetig in r .

Mithilfe des folgenden Lemmas erhält man, dass der Indifferenzpreis p als eine Funktion von (t, r) gegeben ist.

Lemma 3.2.2. *Es existieren $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{D}^m$ -messbare deterministische Funktionen u und \hat{u} : $[0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$Y_s^{t,r} = u(s, R_s^{t,r}) \quad \text{und} \quad \hat{Y}_s^{t,r} = \hat{u}(s, R_s^{t,r})$$

für $P \otimes \lambda$ -f. a. $(\omega, s) \in \Omega \times [t, T]$.

Aus Lemma 3.2.2 folgt:

Satz 3.2.3. *Es existiert eine $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{D}^m$ -messbare deterministische Funktion $p : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}$, $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$ gilt:*

$$V^F(t, v - p(t, r), r) = V^0(t, v, r).$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit den optimalen Strategien, insbesondere mit ihrer Differenz, der Derivatsabsicherung (siehe Gleichung (3.45)).

Satz 3.2.4. *Es existieren $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{D}^m$ -messbare deterministische Funktionen ν und $\hat{\nu}$, definiert auf $[0, t] \times \mathbb{R}^m$ und \mathbb{R}^d -wertig, so dass für $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$ die optimalen Strategien, bedingt an $R_t = r$, gegeben sind durch $\pi_s = \nu(s, R_t^{0,r})$ und $\hat{\pi}_s = \hat{\nu}(s, R_s^{t,r})$ für alle $s \in [t, T]$.*

Wenn man stärkere Bedingungen an die Koeffizienten des Index-Prozesses R und der Funktion F stellt, kann man zeigen, dass die Preisfunktion p differenzierbar in r ist. Außerdem kann man eine explizite Darstellung der Derivatsabsicherung bezüglich des Preis-Gradienten erhalten. Dazu muss man die folgende Klasse von Funktionen einführen:

Definition 3.2.5. *Seien $n, p \geq 1$. Bezeichne $\mathbf{B}^{n \times p}$ die Menge aller Funktionen $h : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$, $(t, x) \mapsto h(t, x)$, differenzierbar in x , für die es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial h(t,x)}{\partial x_i} \right| \leq C$, für alle $t \in [0, T]$ haben wir $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{|h(t,x)|}{1+|x|} \leq C$, und $x \mapsto \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C .*

Wir nehmen an, dass die Koeffizienten der Index-Diffusion neben der Bedingung (R1) noch (R2) und (R3) genügen:

$$(R2) \quad \rho \in \mathbf{B}^{m \times 1}, b \in \mathbf{B}^{m \times 1}.$$

(R3) F ist eine beschränkte und zweimal differenzierbare Funktion, so dass

$$\nabla F \cdot \rho \in \mathbf{B}^{1 \times d} \text{ und } \sum_{i=1}^m b_i(t, r) \frac{\partial}{\partial r_i} F(r) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m [\rho \rho^*]_{ij}(t, r) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} F(r) \in \mathbf{B}^{1 \times 1}.$$

Das folgende Resultat garantiert die Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktionen u und \hat{u} aus Lemma 3.2.2:

Satz 3.2.6. *Angenommen, (R1), (R2) und (R3) seien erfüllt, f sei differenzierbar in r und f und $\nabla_r f$ seien überall Lipschitz-stetig. Dann sind die Funktionen u und \hat{u} Lipschitz-stetig bezüglich r . Außerdem sind sie stetig differenzierbar in r .*

Als direkte Folge erhält man die Glattheit der Indifferenzpreis-Funktion:

Lemma 3.2.7. *Angenommen, die Annahmen von Satz 3.2.6 seien erfüllt. Dann ist die Funktion des Indifferenzpreises p stetig differenzierbar in r .*

Mit der Glattheit des Indifferenzpreises kann man schließlich eine explizite Formel für die Derivatsabsicherung bezüglich des Preis-Gradienten herleiten. Dazu bezeichne $\Delta(t, r) = \hat{\nu}(t, r) - \nu(t, r)$, $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$ die *bedingte Derivatsabsicherung*.

Satz 3.2.8. *Unter den Annahmen von Satz 3.2.6 und mit der obigen Notation ist die Derivatsabsicherung gegeben durch:*

$$\Delta(t, r) = -\Pi_{C(t,r)} [\nabla_r p(t, r) \rho(t, r)] \beta^*(t, r) (\beta(t, r) \beta^*(t, r))^{-1}, \quad (t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m. \quad (3.48)$$

Aus dem Satz folgt, dass die Derivatsabsicherung zur Zeit t nur von R_t abhängt.

Lemma 3.2.9. Sei $k = 1$. Dann ist die Derivatsabsicherung gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Delta(t, r) &= -\frac{\langle \beta(t, r), \nabla_r p(t, r) \rho(t, r) \rangle}{|\beta(t, r)|^2} \\ &= -\frac{\sum_{i=1}^d \beta_i(t, r) \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial r_j} p(t, r) \rho_{ji}(t, r)}{\sum_{i=1}^d \beta_i^2(t, r)}, \quad (t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Bemerkung 1. Angenommen, das Derivat $F(R_T)$ wird an einer Börse gehandelt. Wenn man davon ausgeht, dass der beobachtete Preis ungefähr gleich einem Indifferenzpreis ist, liefert die Hedging-Formel (3.48) ein sehr einfaches Werkzeug, um Derivate abzusichern. Beachte, dass der Risikoaversions-Koeffizient η nicht explizit in Gleichung (3.48) auftaucht.

Bemerkung 2. Wenn $k = d$ ist und die Matrizen $\beta(t, r)$ alle invertierbar sind, ist der Finanzmarkt vollständig und das Derivat $F(R_T)$ kann komplett repliziert werden. Außerdem gilt für die Derivatsabsicherung:

$$\Delta(t, r) = -\nabla_r p(t, r) \rho(t, r) \beta^{-1}(t, r).$$

Wenn S als Index gewählt wird, d. h. $R = S$, erhält man $\Delta = \left(\frac{\partial p}{\partial s_1}(t, r) S^1, \dots, \frac{\partial p}{\partial s_k}(t, r) S^k \right)$. Die Zahl der in den Bestand i zu investierenden Anteile ist gegeben durch $\frac{\Delta^i(t, r)}{S^i(t, r)} = \frac{\partial p}{\partial s_i}$. Deshalb deckt sich Δ mit dem klassischen „Delta-Hedge“ (vgl. Abschnitt 1.1.5).

Sei jetzt R wie oben der HDD-Prozess, modelliert als geometrische Brownsche Bewegung. Angenommen, es existiere ein handelbares, korreliertes, riskantes Vermögen. Genauer: Sei $d = 2$, $k = m = 1$, $\rho = (\alpha_2 \ 0)$, $\beta = (\beta_1 \ \beta_2)$ mit $\alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist die Derivatsabsicherung gegeben durch:

$$\Delta(t, r) = -\alpha_2 \frac{\partial p(t, r)}{\partial r} \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Bewertung nach dem Grenznutzen

Angenommen, es existiere keine Börse und das Derivat $F(R_T)$ werde OTC verkauft. Was ist ein vernünftiger Preis, den ein Verkäufer für das Derivat verlangen kann? Der Indifferenzpreis scheint ein natürlicher Kandidat zu sein, obwohl er den Nachteil hat, dass der Preis eines einzelnen Derivats von der insgesamt verkauften Zahl abhängt, d. h. der Indifferenzpreis ist nicht linear. Zum Beispiel ist der Indifferenzpreis von $2 \times F(R_T)$ nicht gleich zweimal dem Indifferenzpreis von $F(R_T)$. Um eine lineare Version zu erhalten, kann man den Grenzwert des Indifferenzpreises nehmen, wenn die Menge gegen 0 geht. Das so hergeleitete Objekt ist der Indifferenzpreis für eine verschwindende Menge von Derivaten und heißt daher **Grenznutzen-Preis** (*MUP*, *Marginal Utility Price*). Wenn der Investor den MUP für jedes Derivat bezahlen muss, ist er indifferent, ob er eine infinitesimal kleine Menge von Derivaten kaufen soll oder nicht.

Es gelten weiterhin (R1)-(R3). Für $q \in \mathbb{R}$ und $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$ definiere $p(t, r, q)$ den Indifferenzpreis für q Einheiten von $F(R_T^{t,r})$, d. h. $p(t, r, q)$ genügt eindeutig der Gleichung:

$$\sup_{\lambda} \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\lambda, t, r} + q F(R_T^{t, r}) - p(t, r, q) \right) \right] \right\} = \sup_{\lambda} \left\{ \mathbb{E} \left[U \left(v + G_T^{\lambda, t, r} \right) \right] \right\}.$$

Der Preis einer Einheit ist $\frac{p(t, r, q)}{q}$ ($q \neq 0$) und der MUP ist definiert durch:

$$\text{MUP}(t, r) = \left. \frac{\partial}{\partial q} p(t, r, q) \right|_{q=0}.$$

Beachte: $p(t, r, q) = Y_t^{t,r} - \hat{Y}_t^{t,r,q}$, wobei $(\hat{Y}_t^{t,r,q}, \hat{Z}_t^{t,r,q})$ die Lösung ist von

$$\hat{Y}_s^{t,r} = qF(R_T^{t,r}) - \int_s^T \hat{Z}_u^{t,r} dW_u - \int_s^T f(u, R_u^{t,r}, \hat{Z}_u^{t,r}) du, \quad s \in [t, T] \quad (\text{siehe 3.46}). \quad (3.49)$$

Mit $\xi(q) = qF(R_T^{t,r})$ ist $\xi(q)$ eine global beschränkte, differenzierbare Lipschitz-Funktion (mit beschränkten Ableitungen). Die Beschränktheit von ξ ist trivial, da F beschränkt ist und man sich nur für die Differenzierbarkeit eines Prozesses bezüglich q in einer Umgebung von Null interessiert. Damit sind wegen der Beschränktheit von F und der Hypothese vom quadratischen Wachstum für f die Bedingungen von Satz 6.8 in [AIR07] erfüllt und der Prozess $\hat{Y}_t^{t,r,q}$ ist stetig in t und stetig differenzierbar in q .

Ableiten der BSDE (3.49) nach q liefert:

$$\frac{\partial}{\partial q} \hat{Y}_s^{t,r,q} = F(R_T^{t,r}) - \int_s^T \frac{\partial}{\partial q} \hat{Z}_u^{t,r,q} dW_u - \int_s^T \nabla_z f(u, R_u^{t,r}, \hat{Z}_u^{t,r,q}) \frac{\partial}{\partial q} \hat{Z}_u^{t,r,q} du, \quad s \in [t, T].$$

Mit $q = 0$ und Umbenennen des Prozesses zur einfacheren Notation ergibt sich:

$$U_s^{t,r} = F(R_T^{t,r}) - \int_s^T V_s dW_s - \int_s^T \nabla_z f(s, R_s^{t,r}, Z_s^{t,r}) V_s ds.$$

Als Ergebnis dieser Berechnungen erhält man die folgende explizite Formel für den MUP des Derivats:

Satz 3.2.10. *Die explizite Formel für den Grenznutzen-Preis des Derivats $F(R_T)$ ist gegeben durch:*

$$MUP(t, r) = U_t^{t,r},$$

wobei $U_s^{t,r}$ die erste Komponente des Lösungspaares der BSDE

$$U_s^{t,r} = F(R_T^{t,r}) - \int_s^T V_s dW_s - \int_s^T \nabla_z f(s, R_s^{t,r}, Z_s^{t,r}) \cdot V_s ds \quad (3.50)$$

bezeichnet.

Bemerkung 3. Wenn man einen Girsanov-Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes zu dem Maß, das den Prozess $\hat{W} = W + \int_0^\cdot \nabla_z f(s, R_s^{t,r}, Z_s^{t,r}) ds$ zu einer Brownschen Bewegung macht, durchführt, reduziert sich das Lösen von Gleichung (3.50) darauf, die bedingte Erwartung bezüglich der zugrundeliegenden Filtration zu nehmen. Deshalb kann man den Grenznutzen-Preis explizit mit dem folgenden Ausdruck darstellen ($\mathcal{E}(\cdot)$ bezeichne den stochastischen exponentiellen Operator):

$$MUP(t, r) = \mathbb{E} \left[\mathcal{E} \left(\int_0^\cdot \nabla_z f(s, R_s^{t,r}, Z_s^{t,r}) dW_s \right)_t^T F(R_T^{t,r}) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

3.2.3 Indifferenzpreis von Niederschlagsderivaten

In diesem Abschnitt geht es um die Bewertung von Niederschlagsderivaten nach Carmona/Diko [CD05b]. Die Autoren berechnen die Preise von Niederschlagsderivaten nach dem Indifferenznutzen-Prinzip mit exponentiellem Nutzen. Später werden sie dafür das Niederschlagsmodell aus Abschnitt 2.3.6 verwenden.

Ein Agent werde beschrieben durch seine Zeit-invariante Risikopräferenz, charakterisiert durch seine Nutzenfunktion und sein Anfangsvermögen. Er bestimmt seine optimale, den Nutzen maximierende Strategie *mit* einem Derivat auf nicht-gehandeltes Vermögen. Dann findet er seine optimale Strategie *ohne* das Derivat, dessen Preis zum Anfangsvermögen hinzuaddiert wird. Der Preis des Derivats wird so gesetzt, dass der Agent indifferent ist zwischen den beiden Szenarien, und man erhält den Indifferenzpreis.

Der Wertpapierkurs als zufällige Entwicklung

Der Preis eines Wertpapiers wird als geometrische Brownsche Bewegung modelliert, allerdings in einer allgemeineren Form, indem man für die Koeffizienten (hier μ und σ) Abhängigkeit von einem anderen Prozess $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ zulässt. Dann wird die Entwicklung des Wertpapierpreises $S = (S_t)_{t \geq 0}$ definiert durch die folgende stochastische Differenzialgleichung:

$$dS_t = S_t(\mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dW_t). \quad (3.51)$$

Das Paar (S_t, Y_t) bildet einen Markov-Prozess, der in der Literatur **zufällige Entwicklung** (*random evolution*) genannt wird. Wir nehmen an, dass der Prozess Y ein von der Brownschen Bewegung W unabhängiger Markov-Prozess in \mathbb{R}^n ist. Für eine Diskussion der Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (3.51) sei auf Fleming/Soner [FS93] verwiesen.

Nutzenmaximierung ohne Derivat

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$. Eine Erweiterung von $\mathcal{F}_t = \sigma((S_s, Y_s) : 0 \leq s \leq t)$ um die Nullmengen von \mathcal{F} ergibt \mathcal{F}_T . Handeln mit riskanten Anlagen, deren Preisprozess eine zufällige Entwicklung (S_t, Y_t) darstellt, und einem risikolosen Bond mit konstantem Preis (Zinsrate Null) ist erlaubt. Der Agent besitzt das Anfangsvermögen x . Er sucht eine Handelsstrategie φ – den in eine riskante Anlage investierten Geldbetrag –, der den Nutzen des Endvermögens maximiert. Der Vermögensprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ folgt für jede zulässige Strategie φ (vgl. Def. 1.3.17) der Gleichung:

$$dX_t = \varphi_t(\mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dW_t). \quad (3.52)$$

Damit ist es das Ziel,

$$\mathbb{E}[U(X_T)] \quad (3.53)$$

über φ zu maximieren. Das Paar (X, Y) bildet für jede zulässige Strategie ebenfalls eine zufällige Entwicklung.

Die Lösung für das Problem (3.53) kann durch Lösen der **Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung** (HJB) gefunden werden. Der kontrollierte-Rückwärts-Entwicklungs-Operator A^u der zufälligen Entwicklung (X, Y) ist mit $X_0 = x$ und $Y_0 = y$ gegeben durch:

$$A^u V(t, x, y) = \frac{\partial V}{\partial t} + u\mu(y) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(y) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + GV(t, x, y),$$

wobei G der infinitesimale Erzeuger des Prozesses Y ist. Deshalb ist die HJB-Gleichung für die Wertfunktion V des Optimierungsproblems (3.53) gegeben durch:

$$0 = \sup_u A^u V = \frac{\partial V}{\partial t} + GV + \sup_u \left\{ u\mu(y) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(y) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\}.$$

Wir können die Maximierung bezüglich u explizit durchführen, um den optimalen Kontrollkandidaten u^* und eine Integro-Differenzial-HJB-Gleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} u^* &= -\frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)} \frac{\partial V / \partial x}{\partial^2 V / \partial x^2}, \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + GV - \frac{1}{2} \frac{\mu^2(y)}{\sigma^2(y)} \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Die Endbedingung für die Rückwärts-HJB-Gleichung (3.54) erhält man durch die Nutzenfunktion U , nämlich $V(T, x, y) = U(x)$. Wenn wir annehmen, dass der Prozess Y dem in 2.3.6 angegebenen Sprung-Markov-Prozess-Unwetter-Modell folgt, erhält man insbesondere:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda(y) \int_{\mathbb{R}} [V(t, x, z) - V(t, x, y)] \Pi(y, dz) - \frac{1}{2} \frac{\mu^2(y)}{\sigma^2(y)} \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2},$$

wobei λ die Sprungrate-Funktion und Π der Sprungübergangskern für den Prozess Y sind.

Wir lösen jetzt die HJB-Gleichung (3.54) für die **exponentielle Nutzenfunktion** $U(x) = -e^{-\alpha x}$ mit $\alpha > 0$ (vgl. Def. 1.3.28). Dafür gehen wir von einer Lösung der folgenden Form aus:

$$V(t, x, y) = -e^{-\alpha x} F(t, y).$$

Einsetzen in Gleichung (3.54) ergibt:

$$\begin{aligned} F(t, y) \left(\frac{1}{2} \frac{\mu^2(y)}{\sigma^2(y)} \right) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + GF, \\ F(T, y) &= 1. \end{aligned}$$

Das kann mithilfe der Feynman-Kac-Formel gelöst werden, da die rechte Seite der Rückwärts-Entwicklungs-Operator von Y ist. Die Lösung ist dann gegeben durch:

$$F(t, y) = \mathbb{E}_{t,y} \left[e^{-\int_t^T \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} ds} \right].$$

Somit erhält man als Kandidaten für die Lösung von Gleichung (3.54) mit exponentiellem Nutzen:

$$\boxed{V(t, x, y) = -e^{-\alpha x} \mathbb{E}_{t,y} \left[e^{-\int_t^T \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} ds} \right]} \quad (3.55)$$

mit zugehöriger Handelsstrategie $\varphi_t = \frac{\mu(Y_{t-})}{\sigma^2(Y_{t-})\alpha}$, wobei $Y_{t-} := \lim_{h \rightarrow 0-} Y_{t-h}$, um die Vorhersehbarkeit der Handelsstrategie zu gewährleisten. Um sicherzustellen, dass die Lösung wirklich die optimale Lösung des Optimierungsproblems ist, muss man überprüfen, ob sie dem Verifikationstheorem in Fleming/Soner [FS93] entspricht, demzufolge sie eine optimale Lösung des Ursprungsproblems ist. Das folgende Lemma gibt an, dass die Lösung (3.55) für den Fall, dass Y ein Sprung-Markov-Unwetter-Modell ist, wirklich die optimale Lösung darstellt.

Lemma 3.2.11. *Wenn $\sigma(y) > \epsilon > 0$ für alle y , dann ist die Handelsstrategie φ die optimale Handelsstrategie für das Nutzenmaximierungsproblem, wobei Y ein Sprung-Markov-Unwetter-Modell ist.*

Nutzenmaximierung mit Derivat

Wir maximieren jetzt den erwarteten Nutzen mit einem Derivat, das auf den Prozess Y geschrieben ist. Im Niederschlagsmarkt sind fast alle Derivate asiatischer Struktur, da die augenblickliche Niederschlagsintensität in der Praxis nur von geringer Bedeutung ist. Man unterscheidet zwei Haupttypen von Niederschlagsderivaten.

Beim ersten Typ hängt die Auszahlung von der Regenmenge in einem bestimmten Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+$, $\tau_1 \leq \tau_2$, ab (über dem Strike $K \geq 0$):

$$f_1(Y) = \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} Y_t dt - K \right)^+.$$

Beim zweiten Typ ist die Auszahlung abhängig von der Zeit, in der die Niederschlagsmenge während der Periode $[\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+$, $\tau_1 \leq \tau_2$, größer als $\epsilon \geq 0$ ist (über dem Strike $K \geq 0$):

$$f_2(Y) = \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} 1_{\{Y_t > \epsilon\}} dt - K \right)^+.$$

Dabei bezeichnet ϵ eine minimale Niederschlagsintensität, die als „Regen“ bezeichnet werden kann (z. B. 5 mm). Zur Vereinfachung nehmen wir $K = 0$ an, die Ergebnisse lassen sich aber auf $K > 0$ übertragen. Damit können beide Auszahlungen wie folgt ausgedrückt werden:

$$\xi = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(Y_s) ds, \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T.$$

Für den ersten Typ des Derivats gilt $h(y) = y$, für den zweiten $h(y) = 1_{(\epsilon, \infty)}(y)$. Die folgenden Resultate gelten für alle Funktionen $h \geq 0$ mit polynomialem Wachstum.

Bei der Nutzenmaximierung müssen zwei Sichtweisen beachtet werden: Die des Käufers und die des Verkäufers. Die Zielfunktion des Käufers ist $\mathbb{E}[U(X_T + \xi)]$, die des Verkäufers $\mathbb{E}[U(X_T - \xi)]$. Wir werden nur das Käuferproblem lösen, das Verkäuferproblem kann analog gelöst werden. Wir wandeln das Problem des optimalen Portfolios in ein äquivalentes Problem der optimalen Investition mit zufälliger Anlage um.

Satz 3.2.12. Die Lösung (φ^*, V^*) des **Käuferproblems** ist dieselbe wie die Lösung $(\hat{\varphi}^*, \hat{V}^*)$ des folgenden optimalen Investitionsproblems mit zufälliger Anlage:

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} \mathbb{E} \left[U(\hat{X}_t) \right], \\ d\hat{X}_t = g(t, Y_t) dt + \hat{\varphi}_t(\mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dW_t), \end{aligned} \quad (3.56)$$

wobei $g(t, y) = 1_{(\tau_1, \tau_2)}(t)h(y)$.

Satz 3.2.13. Die Lösung (φ^*, V^*) des **Verkäuferproblems** ist dieselbe wie die Lösung $(\hat{\varphi}^*, \hat{V}^*)$ des folgenden optimalen Investitionsproblems mit zufälliger Anlage:

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} \mathbb{E} \left[U(\hat{X}_t) \right], \\ d\hat{X}_t = -g(t, Y_t) dt + \hat{\varphi}_t(\mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dW_t), \end{aligned}$$

wobei $g(t, y) = 1_{(\tau_1, \tau_2)}(t)h(y)$.

Wir können jetzt die HJB-Gleichung für das Problem (3.56) aufstellen:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, y) + GV + \sup_u \left\{ u\mu(y) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(y) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\}.$$

Wir können die Maximierung bezüglich u explizit durchführen, um die optimale Entscheidung u^* und die genaue HJB-Gleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} u^* &= -\frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)} \frac{\partial V / \partial x}{\partial^2 V / \partial x^2}, \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, y) + GV - \frac{1}{2} \frac{\mu^2(y)}{\sigma^2(y)} \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit der Endbedingung $V(T, x, y) = U(x)$. Speziell für das Sprung-Markov-Prozess-Unwetter-Modell wird aus Gleichung (3.57):

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, y) + \lambda(y) \int_{\mathbb{R}} [V(t, x, z) - V(t, x, y)] \Pi(y, dz) - \frac{1}{2} \sigma^2(y) \frac{(\partial V / \partial x)^2}{\partial^2 V / \partial x^2}.$$

Der exponentielle Nutzen ermöglicht es, die Variablen in der Gleichung zu trennen. Wie zuvor suchen wir einen Ausdruck für die Wertfunktion von der Form:

$$V(t, x, y) = -e^{-\alpha x} F(t, y).$$

Die HJB-Gleichung reduziert sich dann zu:

$$F(t, y) \left(\alpha g(t, y) + \frac{1}{2} \frac{\mu^2(y)}{\sigma^2(y)} \right) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + GF,$$

$$F(T, y) = 1.$$

Anwenden der Feynman-Kac-Formel liefert:

$$F(t, y) = \mathbb{E}_y \left[e^{-\int_t^T \left(\alpha g(s, Y_s) + \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} \right) ds} \right].$$

Damit ergibt sich die Lösung:

$$V(t, x, y) = -e^{-\alpha x} \mathbb{E}_y \left[e^{-\int_t^T \left(\alpha g(s, Y_s) + \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} \right) ds} \right] \quad (3.58)$$

mit der zugehörigen Handelsstrategie $\varphi_t = \frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)\alpha}$.

Analog zu Lemma 3.2.11 gilt:

Lemma 3.2.14. *Wenn $\sigma(y) > \epsilon > 0$ für alle y , ist die Handelsstrategie φ die optimale Handelsstrategie für das Nutzenmaximierungsproblem (3.56), wobei Y das Sprung-Markov-Prozess-Unwetter-Modell ist.*

Der Indifferenzpreis

Lösen des Optimierungsproblems ohne und mit Derivat ermöglicht es, einen Preis für das Derivat nach dem Prinzip der Indifferenz (vgl. Abschnitte 1.3.3 und 3.2.2) zu bestimmen. Bezeichne V_0 die Wertfunktion von (3.53) (ohne Derivat), V_ξ die Wertfunktion von (3.56) (mit Derivat) und p den Preis des Derivats mit Payoff ξ . Dann folgt nach dem Indifferenz-Prinzip mit $X_0 = x$ und $Y_0 = y$:

$$V_0(0, x + p, y) = V_\xi(0, x, y).$$

Das Lösen dieser impliziten Gleichung für p ermöglicht es, den Preis des Derivats anzugeben. Mit den Resultaten (3.55) und (3.58) erhält man für den Fall des exponentiellen Nutzens folgenden Preis eines Niederschlagsderivats:

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{V_0(0, x, y)}{V_\xi(0, x, y)} \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\mathbb{E}_y \left[e^{-\int_0^T \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} ds} \right]}{\mathbb{E}_y \left[e^{-\int_0^T \left(\alpha g(s, Y_s) + \frac{1}{2} \frac{\mu^2(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)} \right) ds} \right]} \right).$$

Dieser Preis p hat die wünschenswerte Eigenschaft, vom Anfangsvermögen x unabhängig zu sein, da sich die Vorfaktoren der Wertfunktionen wegekürzen. Den exakten Wert von p erhält man, indem man die Formel mit Monte-Carlo-Simulation des Niederschlagsprozesses Y auswertet.

Die Autoren untersuchen außerdem den Fall, dass Potenznutzen vorliegt, also eine Nutzenfunktion der Form $U(x) = x^\alpha/\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$. Für Potenznutzen erhalten sie eine Ober- und eine Untergrenze des Indifferenzpreises.

Für die Berechnung von Indifferenzpreisen sei auch auf Musiela/Zariphopoulou [MZ04] verwiesen, die einen Bewertungsalgorithmus für Indifferenzpreise in unvollständigen Märkten aufstellen.

3.2.4 Gleichgewichtsmodell

Cao⁸/West⁹ [CW99, CW00, CW04] erweitern das Gleichgewichts-Bewertungsmodell von Robert E. Lucas¹⁰ von 1978 um die aggregierte Dividende und die Wetterunsicherheit. Die Autoren verwenden ein diskretes Setting, in dem die Unsicherheiten durch zwei Zustandsvariablen ausgedrückt werden: Die aggregierte Dividende $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ und die Temperatur $\{T_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$. Die Information eines repräsentativen Investors wird durch die Filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(\delta_\tau, T_\tau, \tau = 0, 1, 2, \dots, t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, beschrieben. Auf dem Finanzmarkt kann er eine riskante Anlage, einen risikolosen Bond und eine endliche Zahl von Contingent Claims zu beliebigen Zeitpunkten handeln. Die Risikoanlage kann als das Markt-Portfolio gesehen werden. Dafür wird ihr Dividenden-Fluss $\{\delta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ als aggregierte Dividenden aufgefasst. Das gesamte Angebot ist auf eine Aktie normiert und die Contingent Claims basieren auf der riskanten Anlage, dem risikolosen Bond und der Wettervariable.

Sei $U(c_t, t) : \mathbb{R}_+ \times t \in \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, die einem Konsum $\{c_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ zur Zeit t einen Wert zuordnet. $U(\cdot, t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist wachsend, strikt konkav und hat eine stetige Ableitung $U_c(\cdot, t)$ auf $(0, \infty)$.

Annahme 1. Die Präferenz des repräsentativen Agenten wird beschrieben durch die Nutzenfunktion:

$$U(c_t, t) = e^{-\eta t} \frac{c_t^{\gamma+1}}{\gamma+1} \quad (3.59)$$

mit der Zeitpräferenzrate $\eta > 0$, dem Risikoparameter $\gamma \in (-1, 0)$ und $t \in \mathbb{N}_0$.

Für den Prozess der aggregierten Dividende $\delta = \{\delta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ beziehen wir uns auf Marsh/Merton [MM87], deren Schätzergebnisse Mean-Reversion der Dividendenrate vorschlagen, also eine Tendenz, zum Mittelwert zurückzukehren.

Annahme 2. Die aggregierte Dividende δ_t ist gegeben durch den folgenden Markov-Prozess:

$$\ln \delta_t = \alpha + \mu \ln \delta_{t-1} + \sigma_\delta \xi_t, \quad (3.60)$$

wobei $1 - \mu$, $\mu \leq 1$, die Geschwindigkeit der Mean-Reversion angibt, $\alpha > 0$, $\sigma_\delta > 0$ und $(\xi_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -Variablen ist.

Außerdem gilt für den Temperaturprozess $\{T_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$:

Annahme 3. Die Temperatur $\{T_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ folgt der Gleichung $T_t = s_t + R_t$ aus Abschnitt 2.2.2 mit dem Temperaturresiduum $\{R_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ als AR(p)-Prozess¹¹:

$$R_t = \sum_{i=1}^p \rho_i R_{t-i} + \sigma_t \cdot \epsilon_t.$$

Die Korrelation zwischen den normalverteilten Zufallsvariablen ϵ_t (im Temperaturprozess) und ξ_t (im Dividendenprozess) sei gegeben durch:

$$\text{corr}(\epsilon_t, \xi_{t'}) = \begin{cases} \phi & \text{für } t = t', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.61)$$

⁸Schulich School of Business, York University, Toronto, Ontario, Kanada

⁹Faculty of Management, University of Toronto, Toronto, Ontario, Kanada

¹⁰R. E. Lucas. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica* 46 (1978), 1429-1445

¹¹In Abschnitt 2.2.2 wurde die Temperatur $\{T_t\}_{t=1,2,\dots,T}$ mit $T = 20$ [Jahre] $\cdot 365$ [Tage] = 7300 modelliert, da die Autoren einen Temperaturdatensatz über 20 Jahre verwenden. Das Modell lässt sich aber leicht für $t \in \mathbb{N}_0$ verallgemeinern.

Die Spezifizierungen der Präferenz des repräsentativen Agenten in Gleichung (3.59), des Dividendenprozesses in Gleichung (3.60) und der Temperaturdynamik in den Gleichungen (2.1) und (2.2) ermöglichen die Bewertung eines beliebigen, von einer Temperaturvariablen abhängigen Claims.

Bezeichne $\theta_t = (\theta_t^s, \theta_t^B, \theta_t^x)$ das Portfolio des Agenten, wobei θ_t^s , θ_t^B und θ_t^x die Anteile an der riskanten Anlage, dem risikolosen Bond und anderen Contingent Claims bezeichnen. Bezeichne der Vektor X_t die Wertpapierkurse zur Zeit t und D_t den zugehörigen Vektor der Dividenden. Der Konsum des Agenten wird finanziert durch die Handelsstrategie $\{\theta_t\}_{t=1,2,\dots,T}$. Sein Ziel ist es, eine optimale Handelsstrategie zu finden, die seinen erwarteten Nutzen maximiert. Das führt zu:

$$X_t = \mathbb{E} \left[\sum_{\tau=t+1}^T \frac{U_c(c_\tau, \tau)}{U_c(c_t, t)} D_\tau | \mathcal{F}_t \right].$$

Somit ist der Preis eines Wertpapiers gleich dem Erwartungswert der diskontierten Summe seiner Dividenden.

Im Gleichgewicht sind der Finanzmarkt und der Gütermarkt geräumt, so dass der aggregierte Konsum gleich den Dividenden aus den Risikoanlagen ist. Damit hat ein risikoloser Bond, der eine Einheit des Konsumgutes zur Zeit T und 0 zu allen anderen Zeitpunkten auszahlt, folgenden Gleichgewichtspreis für $t \in (0, T)$:

$$B(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} \mathbb{E} [U_c(\delta_t, T) | \mathcal{F}_t].$$

Lemma 3.2.15. *Unter CRRA-Nutzen und Annahme 2 ist der Preis des risikolosen Bonds gegeben durch:*

$$B(t, T) = \delta_t^{\gamma(\mu^{T-t}-1)} \exp \left(-\eta(T-t) + \sum_{i=t+1}^T \left(\alpha\gamma\mu^{T-i} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_\delta^2\mu^{2(t-i)} \right) \right).$$

Im speziellen Fall $\mu = 1$ reduziert sich der Bondpreis zu:

$$B(t, T) = \exp \left(\left(-\eta + \alpha\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_\delta^2 \right) (T-t) \right).$$

Ein Contingent Claim mit Auszahlung q_T zur Maturität T hat zur Zeit t den Preis:

$$F(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} \mathbb{E} [U_c(\delta_t, T) q_T | \mathcal{F}_t]. \quad (3.62)$$

Bewertung von HDD-/CDD-Forwards

Betrachte einen HDD-Forward-Vertrag mit Auszahlungsbetrag 1 je HDD-Punkt und Ausübungspreis K , wobei der HDD-Index von τ_1 bis $\tau_2 > \tau_1$ gemessen wird. Durch Anwenden der Formel aus Gleichung (3.62) und der CRRA-Nutzenfunktion aus Gleichung (3.59) kann der Wert des HDD-Forward-Vertrags zur Zeit t ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} f_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) &= \mathbb{E} \left[\frac{U_c(\delta_{\tau_2}, \tau_2)}{U_c(\delta_t, t)} (\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\eta(\tau_2-t)} \mathbb{E} \left[\frac{\delta_{\tau_2}^\gamma}{\delta_t^\gamma} (\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K) | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Bei Abschluss des Forwards wird der Strike K so gewählt, dass der Wert des Vertrags null ist. Damit ist der Forward-Preis zur Zeit t , $F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2)$, genau der Wert von K , für den $f = 0$ in Gleichung (3.63). Dieser ist gegeben durch:

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{\mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma \text{HDD}(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma | \mathcal{F}_t]} = \frac{e^{-\eta(\tau_2-t)} \delta_{\tau_2}^\gamma \mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^{-\gamma} \text{HDD}(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t]}{B(t; \tau_2)}. \quad (3.64)$$

Für CDD-Forwards erhält man:

$$f_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) = e^{-\eta(\tau_2-t)} \mathbb{E} \left[\frac{\delta_{\tau_2}^\gamma}{\delta_t^\gamma} (\text{CDD}(\tau_1, \tau_2) - K) | \mathcal{F}_t \right],$$

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \frac{e^{-\eta(\tau_2-t)} \delta_t^{-\gamma} \mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma \text{CDD}(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t]}{B(t; \tau_2)}.$$

Der HDD-Forward-Preis (3.64) kann anders ausgedrückt werden als

$$F_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{\mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma \text{HDD}(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma | \mathcal{F}_t]}$$

$$= \mathbb{E} [\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t] + \frac{\text{Cov} [\delta_{\tau_2}^\gamma, \text{HDD}(\tau_1, \tau_2)]}{\mathbb{E} [\delta_{\tau_2}^\gamma | \mathcal{F}_t]}. \quad (3.65)$$

Dann ist der erste Term der erwartete Wert des HDD-Index und der zweite die Risikoprämie.

Lemma 3.2.16. *Die Risikoprämie des Forward-Preises ist null, wenn der Dividendenprozess und der Temperaturprozess voneinander unabhängig sind, d. h. $\phi = 0$.*

Wenn man die Autokorrelationsparameter ρ_i , $i = 1, \dots, k$, im Temperaturmodell gleich null setzt, erhält man geschlossene Formeln für die Forward-Preise:

Lemma 3.2.17. *Für $\rho_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, sind die Gleichgewichtspreise zur Zeit $t < \tau_1$ gegeben durch:*

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \left((18 - \mu'_Y(\tau)) \cdot \Phi \left(\frac{18 - \mu'_Y(\tau)}{\sigma_\tau} \right) + \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(18 - \mu'_Y(\tau))^2}{2\sigma_\tau^2} \right),$$

$$F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \left((\mu'_Y(\tau) - 18) \cdot \Phi \left(\frac{\mu'_Y(\tau) - 18}{\sigma_\tau} \right) + \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(\mu'_Y(\tau) - 18)^2}{2\sigma_\tau^2} \right)$$

mit $\mu'_Y(\tau) = s_\tau + \gamma \phi \mu^{\tau-t} \sigma_\delta \sigma_\tau$.

Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, s_t die Saisonalität der Temperatur (siehe Abschnitt 2.2.2), γ die Zeitpräferenzrate (siehe Gleichung (3.59)), ϕ die Korrelation der Zufallsvariablen (siehe Gleichung (3.61)), $1 - \mu$ die Geschwindigkeit der Mean-Reversion und σ_δ und σ_τ die Standardabweichungen der Dividende (Gleichung (3.60)) und des Temperaturresiduums.

Die Gleichgewichtspreise zur Zeit $t \in (\tau_1, \tau_2)$ sind gegeben durch:

$$F_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \text{HDD}(\tau_1, t) + \sum_{\tau=t+1}^{\tau_2} \left((18 - \mu'_Y(\tau)) \cdot \Phi \left(\frac{18 - \mu'_Y(\tau)}{\sigma_\tau} \right) + \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(18 - \mu'_Y(\tau))^2}{2\sigma_\tau^2} \right),$$

$$F_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2) = \text{CDD}(\tau_1, t) + \sum_{\tau=t+1}^{\tau_2} \left((\mu'_Y(\tau) - 18) \cdot \Phi \left(\frac{\mu'_Y(\tau) - 18}{\sigma_\tau} \right) + \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(\mu'_Y(\tau) - 18)^2}{2\sigma_\tau^2} \right).$$

Bewertung von HDD-/CDD-Optionen

Wir betrachten jetzt eine europäische Option basierend auf $\text{HDD}(\tau_1, \tau_2)$ mit Maturität τ_2 und Ausübungspreis K . Bezeichne $C_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K)$ den Preis der Call-Option und $P_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K)$ den der Put-Option. Wieder können durch die Gleichungen (3.59) und (3.62) die Call- und Put-Werte ausgedrückt werden als

$$C_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) = \frac{1}{e^{\eta(\tau_2-t)} \cdot \delta_t^\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma \max(\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t \right], \quad (3.66)$$

$$P_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) = \frac{1}{e^{\eta(\tau_2-t)} \cdot \delta_t^\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma \max(K - \text{HDD}(\tau_1, \tau_2), 0) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.67)$$

Analog erhält man für $C_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K)$ und $P_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K)$:

$$C_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) = \frac{1}{e^{\eta(\tau_2-t)} \cdot \delta_t^\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma \max(\text{CDD}(\tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t \right],$$

$$P_{\text{CDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) = \frac{1}{e^{\eta(\tau_2-t)} \cdot \delta_t^\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma \max(K - \text{CDD}(\tau_1, \tau_2), 0) | \mathcal{F}_t \right].$$

Für $\phi \neq 0$ enthalten diese Optionspreise auch einen Marktpreis des Risikos. Für $\phi = 0$ erhält man die Preise durch Abzinsen der Auszahlung des Futures:

$$\begin{aligned} C_{\text{HDD}}(t; \tau_1, \tau_2, K) &= e^{-\eta(\tau_2-t)} \delta_t^{-\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma \max(\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\eta(\tau_2-t)} \delta_t^{-\gamma} \mathbb{E} \left[\delta_{\tau_2}^\gamma | \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E} \left[\max(\text{HDD}(\tau_1, \tau_2) - K, 0) | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen keine expliziten Lösungsformeln zulassen, wird der Marktpreis des Risikos anhand von Simulationen untersucht.

Numerische Analyse des Marktpreises des Risikos

Die geschätzten Parameter des Temperaturmodells wurden bereits in Abschnitt 2.2.2 angegeben. Nach Lemma 3.2.15 wird die risikofreie Rate durch die Parameter η , α , γ und σ_δ bestimmt. Die Zeitpräferenzrate wird $\eta = 0,03$ gesetzt, die Volatilität der Dividende $\sigma_\delta = 0,2$, was der durchschnittlichen Volatilität eines Aktienindex entspricht. Der Risikoaversions-Parameter γ variiert in der Analyse zwischen -1 und 0. Für einen festen Wert von γ wird α so gewählt, dass man eine risikolose Rate von 0,06 erhält.

Für die numerische Analyse simuliert man jetzt den Pfad des Dividendenprozesses (nach Annahme 2 mit $\mu = 1$) und den Pfad der täglichen Durchschnittstemperatur (nach Annahme 3 mit dem Temperaturresiduum als AR(3)-Prozess), was zu HDD-/CDD-Werten für jeden Pfad führt. Dann berechnet man nach Gleichung (3.62) die Auszahlung des betrachteten Derivats unter CRRA-Nutzen. Diese Schritte wiederholt man sehr oft und errechnet den Mittelwert der Auszahlungen, um den Wert des Derivats zu erhalten.

Cao/West [CW99] führen Simulationen mit verschiedenen Parameterwerten durch und berechnen die Forward- und Optionspreise für eine HDD- und eine CDD-Saison, um den Einfluss des Marktpreises des Risikos zu bestimmen. Sie setzen den Parameter der Risikoaversion $\gamma = -0,5$ (Potenznutzenfunktion) und $\gamma = -1$ (logarithmische Nutzenfunktion) und betrachten die Korrelationsfälle $\phi = -0,2$ und $\phi = 0,2$. Die Ergebnisse vergleichen sie mit den Resultaten für $\phi = 0$, also wenn der Marktpreis des Risikos null ist.

3 Bewertung und Absicherung

Forecast		Forward-Preise:									
		$\gamma = -0.5$					$\gamma = -1.0$				
		$\phi = -0.2$		$\phi = 0.2$			$\phi = -0.2$		$\phi = 0.2$		
Forward	(1)	(2)	(3) =	(4)	(5) =	(6)	(7) =	(8)	(9) =	(10)	(11) =
			(2)/(1)-1		(4)/(1)-1		(6)/(1)-1		(8)/(1)-1		(10)/(1)-1
Panel A: Forecast is Historical Average											
Atlanta	2396.95	2394.44	-0.10%	2399.43	0.10%	2391.60	-0.22%	2402.25	0.22%		
Chicago	5126.15	5123.18	-0.06%	5129.09	0.06%	5118.98	-0.14%	5132.22	0.12%		
Dallas	2141.05	2138.41	-0.12%	2143.64	0.12%	2135.59	-0.26%	2146.63	0.26%		
New York	3862.35	3860.13	-0.06%	3864.55	0.06%	3856.99	-0.14%	3866.88	0.12%		
Philadelphia	3899.75	3897.35	-0.06%	3902.13	0.06%	3894.05	-0.15%	3904.67	0.13%		

Historical Simulation		Optionspreise:											
		$\gamma = -0.5$				$\gamma = -0.5$				$\gamma = -1.0$			
		$\phi = 0.0$		$\phi = -0.2$		$\phi = 0.2$		$\phi = -0.2$		$\phi = 0.2$			
Strike	Option	Strike	Option	Option	%	Option	%	Option	%	Option	%		
Price	Value	Price	Value	Value	(6) =	Value	(8) =	Value	(10) =	Value	(12) =		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)/(4) - 1	(7)	(7)/(4) - 1	(9)	(9)/(4) - 1	(11)	(11)/(4) - 1		
Panel A: Forecast is Historical Average													
Atlanta	Call	2419.47	108.78	2396.95	68.44	67.35	-1.59%	69.53	1.59%	66.48	-2.87%	70.86	3.54%
	Put		108.78		68.74	69.82	1.58%	67.67	-1.55%	70.63	2.75%	66.35	-3.47%
Chicago	Call	5114.37	144.22	5126.15	74.96	73.76	-1.61%	76.17	1.61%	72.79	-2.89%	77.65	3.59%
	Put		144.23		75.59	76.81	1.61%	74.40	-1.58%	77.71	2.80%	72.91	-3.55%
Dallas	Call	2179.21	60.40	2141.05	73.17	72.01	-1.58%	74.33	1.59%	71.08	-2.85%	75.74	3.51%
	Put		60.40		73.44	74.58	1.55%	72.32	-1.52%	75.42	2.70%	70.93	-3.42%
New York	Call	3859.63	105.53	3862.35	55.97	55.07	-1.61%	56.87	1.61%	54.35	-2.89%	57.97	3.58%
	Put		105.53		56.44	57.35	1.61%	55.55	-1.58%	58.02	2.79%	54.44	-3.54%
Philadelphia	Call	3901.00	109.67	3899.75	61.14	60.16	-1.61%	62.12	1.61%	59.37	-2.89%	63.33	3.58%
	Put		109.67		61.62	62.61	1.61%	60.65	-1.58%	63.34	2.80%	59.44	-3.54%

Abbildung 3.4: Forward- und Optionspreise für eine HDD-Saison (Oktober bis März) für fünf amerikanische Städte unter verschiedenen Parametern, Quelle: [CW99]

Abbildung 3.4 (oben) zeigt die simulierten Preise von Forwards über eine HDD-Saison (Oktober bis März) für die verschiedenen Parameter in fünf amerikanischen Städten. Man kann erkennen, dass der Marktpreis des Risikos keinen großen Einfluss auf die Forward-Preise hat. Wenn man von einem Marktpreis des Risikos gleich null („Forecast Forward“, $\phi = 0$) zu einem ungleich null übergeht, ändern sich die Preise um weniger als ein Prozent.

In Abbildung 3.4 (unten) sieht man die Preise von Call- und Put-Optionen auf HDD-Forwards. Unter *Historical Simulation* wurden die Preise nach der „Burn-Analyse“ berechnet, die wir am Anfang dieses Kapitels beschrieben hatten. Dabei wird der Preis als Mittelwert der historischen Auszahlungen der letzten Jahre (hier 20) berechnet. Der Strike wird gleich der erwarteten Auszahlung gesetzt. In den übrigen Spalten werden die Preise für verschiedene Parameter simuliert. Auch hier wird der Strike gleich dem erwarteten Wert des Forwards gesetzt.

Es fällt auf, dass sich die Preise der historischen Simulation stark von den anderen unterscheiden. Wie bereits erwähnt bewertet diese Methode besonders bei kurzen Beobachtungszeiträumen

extreme Wetterlagen über, da jedes Jahr gleich gewichtet wird. Auf die Optionspreise hat der Marktpreis des Risikos ebenfalls keinen großen Einfluss, auch wenn die Prozentzahlen aufgrund der nicht-linearen Auszahlung größer sind als bei den Forward-Preisen. Je größer die Risikoaversion ist, um so größer ist auch der Einfluss des Marktpreises des Risikos, die Veränderungen liegen jedoch immer unter 4%.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass der Marktpreis des Risikos in diesem Rahmen keinen großen Einfluss auf die Preise hat. Allerdings hatten wir hier eine spezielle Klasse von Nutzenfunktionen mit kleiner Spanne der Risikoaversion verwendet und nur zeitgleiche Korrelationen von aggregierter Dividende und der Temperatur modelliert. In [CW04] lassen die Autoren auch verzögerte Korrelationen zu und betrachten Risikoaversion bis $\gamma = -40$. Dann ergibt sich ein viel größerer Einfluss des Marktpreises des Risikos, bis über 50%. Er ist also nur vernachlässigbar bei niedriger Risikoaversion des Investors und geringer Korrelation von Dividende und Temperatur.

3.3 Absicherung mit ortsfremden Wetterderivaten

Wie bereits erwähnt werden an der Chicago Mercantile Exchange (CME) Futures auf HDD-, CDD- und CAT-Indizes nur für bestimmte Städte – in Deutschland Essen und Berlin – gehandelt. Interessenten können sich allerdings in anderen Städten befinden oder – wie z. B. Stromanbieter – von den Temperaturen in einem größeren Gebiet abhängen. In diesem Kapitel behandeln wir, wie man die verfügbaren Derivate auch in anderen Regionen verwenden kann.

3.3.1 Kriterien für die Wahl des Ortes

Zunächst beschäftigen wir uns damit, wie man beurteilen kann, ob ein für einen anderen Ort angebotenes Wetterderivat zur Absicherung des eigenen Wetterrisikos geeignet ist, also inwieweit das Wetter an einem anderen Ort dem eigenen Wetter entspricht. Zu diesem Zweck betrachten wir die Temperaturdaten des Deutschen Wetterdienstes an acht deutschen Wetterstationen: Berlin-Tempelhof, Potsdam, Dresden-Klotzsche, Rostock-Warnemünde, Hamburg-Fuhlsbüttel, Bamberg, München-Flughafen und Zugspitze. Es liegen die Daten vom 01.01.1991 bis zum 31.12.2008 (6575 Werte) vor¹². Abbildung 3.5 zeigt die täglichen HDD-Mittelwerte und HDD-Standardabweichungen sowie die jeweilige Entfernung zu den Städten Berlin und Essen, für die an der CME Derivate gehandelt werden. Die meisten Städte liegen deutlich näher an Berlin. Bamberg, München und die Zugspitze sind von beiden Städten ungefähr gleich weit entfernt. Um sich mit Wetterderivaten eines anderen Ortes abzusichern, wählt man einen Ort (oder auch mehrere), dessen Wetter dem eigenen Wetter (oder Wetterindex) möglichst ähnlich ist.

Korrelationskoeffizient

Als Maß für die lineare Abhängigkeit von Wetterdaten zweier Städte werden wir den empirischen **Korrelationskoeffizienten** zweier Zeitreihen verwenden. Er berechnet sich anhand der empirischen Varianzen und Kovarianz folgendermaßen:

$$\rho_{\text{emp}}(X^A, X^B) = \frac{\text{Cov}_{\text{emp}}[X^A, X^B]}{\sqrt{\text{Var}_{\text{emp}}[X^A] \cdot \text{Var}_{\text{emp}}[X^B]}}$$

wobei $X^A = (X_t^A)_{t \geq 0}$ die Zeitreihe der Temperatur oder eines Wetterindex am Ort A und $X^B = (X_t^B)_{t \geq 0}$ die gleichen Daten für den Ort B darstellen.

Wir berechnen die empirischen Korrelationskoeffizienten der Zeitreihen der täglichen HDDs und der Niederschlagsmengen von 1991 bis 2008 für die acht deutschen Städte. Abbildung 3.6 (oben)

¹²Die Datenreihe für München beginnt erst am 17.05.1992.

	Berlin	Potsdam	Dresden	Rostock	Hamburg	Bamberg	München	Zugsp.
μ DAT	10,11	9,82	9,63	9,72	9,57	9,58	9,15	-3,85
σ DAT	7,83	7,86	7,86	6,89	6,97	7,66	7,94	6,87
μ tHDD	8,44	8,69	8,83	8,57	8,73	8,84	9,21	21,85
σ tHDD	7,04	7,12	7,18	6,45	6,48	7,04	7,44	6,87
μ Niederschlag	1,59	1,59	1,75	1,70	2,18	1,75	2,11	5,80
σ Niederschlag	3,84	3,83	4,66	3,84	4,56	3,97	4,76	10,10
Berlin (km)	0	26	165	194	255	344	503	586
Essen (km)	453	428	471	452	309	324	492	528

Anmerkung: Es wurden nur vollständige Jahre ausgewertet, d. h. in München 1993-2008 (5843 Werte), sonst 1991-2008 (6575 Werte).

Abbildung 3.5: Mittelwert (μ) und Standardabweichung (σ) der DAT, der täglichen HDDs und des täglichen Niederschlags in Millimetern 1991-2008 und Entfernung zu Berlin und Essen für ausgewählte deutsche Städte, Daten: DWD

zeigt die Ergebnisse sowie im Vergleich dazu die Entfernungen zwischen den Städten. Man erkennt erwartungsgemäß, dass die Korrelation der HDD-Werte mit steigender Entfernung im Allgemeinen abnimmt (mit Ausnahme der Zugspitze). Man erhält ein anderes Ergebnis für die Korrelationskoeffizienten der Niederschlagsmengen (Abbildung 3.6 (unten)): Sie liegen deutlich niedriger als die HDD-Korrelationen, da Niederschlag stärker ein lokales Phänomen darstellt als die Temperatur.

Mithilfe des Korrelationskoeffizienten kann man jetzt also einen Ort bestimmen, dessen Wetterdaten zu denen des abzusichernden Ortes eine möglichst hohe Korrelation aufweisen.

Sensitivität und Spezifität

Van Asseldonk¹³ [vA03] schlägt neben dem Korrelationskoeffizienten noch die Parameter „Sensitivität“ und „Spezifität“ als Kriterien für die Auswahl der Orte vor. Sie geben den Grad der Fehlklassifikation an. Allgemein beschreibt die Sensitivität (auch Richtigpositiv-Rate genannt) die Wahrscheinlichkeit, ein positives Ereignis auch als positiv zu erkennen. Die Spezifität (Richtignegativ-Rate) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, ein negatives Ereignis richtig als negativ einzuordnen.

Angenommen, ein Unternehmer am Ort A möchte sich mit einem Wetterderivat gegen Wetterrisiken absichern. Allerdings werden nur Wetterderivate für einen Ort B und einen Ort C angeboten. Jetzt kann er anhand der Parameter Sensitivität und Spezifität erkennen, welcher Ort sich besser eignet, sein Wetterrisiko abzusichern. Beispielsweise kann man sich einen Unternehmer in München vorstellen, der ein Wetterderivat an der CME abschließen möchte, wo jedoch nur Wetterderivate für Essen und Berlin angeboten werden. Dann bieten die Parameter Sensitivität und Spezifität ein Kriterium, welche Derivate für ihn besser geeignet sind. Anhand der historischen Daten der Städte kann man diese Parameter errechnen.

Im Fall von Wetterderivaten erhält man die **Sensitivität** durch den Prozentsatz, wie oft das Wetterderivat des Ortes B (Berlin/Essen) in der Vergangenheit zu einer Auszahlung kam, wenn das (hypothetische, da nicht angebotene) Wetterderivat des Ortes A (München) ebenfalls zu einer Auszahlung gekommen ist, also:

$$\text{Sensitivität} = \frac{\#\{\text{Auszahlung in A und B}\}}{\#\{\text{Auszahlung in A}\}}.$$

¹³Institute for Risk Management in Agriculture, Farm Management Group, Department of Social Sciences, Wageningen University, Wageningen, Niederlande

HDD	Berlin	Potsdam	Dresden	Rostock	Hamburg	Bamberg	München	Zugsp.
Berlin	1							
Potsdam	0,997 (26 km)	1						
Dresden	0,985 (165 km)	0,985 (158 km)	1					
Rostock	0,975 (194 km)	0,972 (197 km)	0,958 (355 km)	1				
Hamburg	0,973 (255 km)	0,973 (242 km)	0,960 (378 km)	0,979 (152 km)	1			
Bamberg	0,956 (344 km)	0,959 (321 km)	0,969 (243 km)	0,930 (477 km)	0,937 (414 km)	1		
München	0,940 (503 km)	0,941 (485 km)	0,958 (359 km)	0,913 (662 km)	0,915 (611 km)	0,979 (198 km)	1	
Zugspitze	0,840 (586 km)	0,842 (567 km)	0,857 (444 km)	0,843 (739 km)	0,850 (679 km)	0,853 (266 km)	0,846 (85 km)	1

Nieder- schlag	Berlin	Potsdam	Dresden	Rostock	Hamburg	Bamberg	München	Zugsp.
Berlin	1							
Potsdam	0,805 (26 km)	1						
Dresden	0,468 (165 km)	0,507 (158 km)	1					
Rostock	0,392 (194 km)	0,356 (197 km)	0,0176 (355 km)	1				
Hamburg	0,417 (255 km)	0,408 (242 km)	0,181 (378 km)	0,557 (152 km)	1			
Bamberg	0,306 (344 km)	0,312 (321 km)	0,325 (243 km)	0,189 (477 km)	0,230 (414 km)	1		
München	0,193 (503 km)	0,187 (485 km)	0,273 (359 km)	0,120 (662 km)	0,125 (611 km)	0,436 (198 km)	1	
Zugspitze	0,151 (586 km)	0,146 (567 km)	0,213 (444 km)	0,082 (739 km)	0,072 (679 km)	0,259 (266 km)	0,452 (85 km)	1

Anmerkung: Es wurden sämtliche verfügbaren Daten ausgewertet, d. h. in München vom 17.05.1992 bis zum 31.12.2008 (6072 Werte), sonst vom 01.01.1991 bis zum 31.12.2008 (6575 Werte).

Abbildung 3.6: Empirische Korrelationskoeffizienten für die HDD-Werte (oben) und die Niederschlagsmengen (unten) in acht deutschen Städten (in Klammern die Entfernungen), 01.01.91-31.12.08, Daten: DWD

	Berlin	Potsdam	Dresden	Rostock	Hamburg	Bamberg	München	Zugspitze
Jahre	18	18	18	18	18	18	16	18
Mw. μ	3082	3172	3225	3127	3188	3228	3398	7974
Std. σ	232	244	249	235	240	206	243	181
Strike K_1	3198	3294	3349	3244	3308	3331	3519	8064
Sensitivität		1,00	0,50	0,80	0,80	0,67	0,50	0,57
Spezifität		1,00	0,86	1,00	1,00	0,87	0,86	1,00
Strike K_2	3314	3416	3474	3361	3428	3434	3641	8155
Sensitivität		1,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,50	0,33
Spezifität		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Abbildung 3.7: Mittelwert und Standardabweichung der jährlichen HDDs 1991-2008 und Sensitivität und Spezifität der sieben Städte bezüglich Berlins für verschiedene Strike-Werte ($K_1 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$, $K_2 = \mu + \sigma$), Daten: DWD

Die **Spezifität** ist der Prozentsatz, wie oft das Wetterderivat am Ort B (Berlin/Essen) nicht zu einer Auszahlung gekommen ist, wenn auch am Ort A (München) keine Auszahlung erfolgte, also:

$$\text{Spezifität} = \frac{\#\{\text{Auszahlung weder in A noch B}\}}{\#\{\text{keine Auszahlung in A}\}}.$$

Leider bietet der DWD keine Wetterdaten für Essen auf seiner Internetseite an. Deshalb können wir die Spezifität und Sensitivität der sieben deutschen Städte hier nur bezüglich Berlins angeben. Es wurden die Mittelwerte und Standardabweichungen der jährlichen HDDs von 1991 bis 2008 berechnet, dann der Strike des Wetterderivats auf den Mittelwert plus eine halbe bzw. eine ganze Standardabweichung gesetzt und untersucht, wie oft es in Berlin und den anderen Städten zu Auszahlungen gekommen ist. Daraus ergeben sich die Parameter HDD-Sensitivität und HDD-Spezifität. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.7 zu sehen.

Man erkennt beispielsweise, dass es bei einem Wetterderivat auf jährliche HDDs in Berlin mit Strike $K_1 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$ in 50% der Fälle zu einer Auszahlung gekommen ist, wenn auch in München eine Auszahlung fällig war (Sensitivität). Und 86% der Fälle ohne Auszahlung sind durch das Wetterderivat in Berlin richtig eingeordnet worden (Spezifität). Bei einem Strike von $K_2 = \mu + \sigma$ erhöht sich diese Zahl sogar auf 100%.

Anhand von Korrelationskoeffizient, Spezifität und Sensitivität kann man also bestimmen, wie sehr das Wetter an einem Ort dem Wetter an einem anderen Ort entspricht. Damit erhält man Kriterien, mit welchen Wetterderivaten welcher Orte man sein eigenes Wetterisiko am besten absichern kann.

3.3.2 Modell für raumzeitliche Temperaturdynamik

Benth/Šaltytė-Benth/Jalinskas¹⁴ [BŠBJ07] und Barth¹⁵/Benth/Potthoff¹⁶ [BBP08] stellen ein zeitstetiges räumlich-zeitliches Modell für die Temperaturdynamik auf, um Wetterrisiken mit den verfügbaren Derivaten abzusichern, wenn für den eigentlichen Ort keine Derivate angeboten werden.

Modell

$C(\mathcal{A})$ bezeichne den Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf einer Borel-Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$, $L^2(\mathcal{A})$ den Raum der bezüglich des Lebesgue-Maßes quadratisch integrierbaren Funktionen auf

¹⁴ Vilnius University, Vilnius, Litauen

¹⁵ Centre of Mathematics for Applications, Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norwegen

¹⁶ Institut für Mathematik, Universität Mannheim, Mannheim

\mathcal{A} . $C^{1,0}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A})$ bezeichne den Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}$, die in der ersten Variable stetig differenzierbar sind. Sei \mathcal{D} ein kompakter Bereich in \mathbb{R}^2 mit stückweise glattem Rand $\partial\mathcal{D}$, versehen mit der euklidischen Metrik. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, die den „üblichen Bedingungen“ genügt, d. h. $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist rechtsstetig und \mathcal{F}_0 enthält alle P -Nullmengen. Außerdem sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$.

Das raumzeitliche Temperaturmodell ist gegeben durch die folgende Gleichung für $t \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathcal{D}$:

$$\boxed{dT(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} s(t, x) - \kappa(x)(T(t, x) - s(t, x)) \right) dt + \sigma(t, x) dW(t, x).} \quad (3.68)$$

Die folgenden Parameter werden verwendet:

- $s(t, x) \in C^{1,0}(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D})$ beschreibt den deterministischen, saisonalen Mittelwert der Temperatur in Abhängigkeit von Zeit und Ort (wird aber später als ortsunabhängig angenommen) mit $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$s(t) = c_0 + c_1 \cos(2\pi(t - c_2)/365).$$

- $\kappa(x) \in C(\mathcal{D})$ beschreibt die Geschwindigkeit der Rückkehr der Temperatur zum saisonalen Mittelwert (Mean-Reversion-Parameter). Empirische Untersuchungen für Litauen und Schweden [BŠB05, BŠB07, BŠBK07] zeigen, dass κ über die Zeit nahezu konstant ist, weshalb es hier zeitunabhängig modelliert wird (siehe auch Kapitel 2). Bei der Parameterschätzung für Litauen wird κ zusätzlich noch als ortsunabhängig angenommen, also $\kappa(x) \equiv \kappa$.
- $\sigma(t, x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D})$ beschreibt die Raum-Zeit-Volatilität der Temperatur und wird später für Litauen ebenfalls ortsunabhängig geschätzt mit $d_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1, \dots, 9$:

$$\sigma^2(t) = d_0 + \sum_{k=1}^4 d_{2k} \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + d_{2k+1} \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right).$$

- $W(t, x)$ ist ein Gaußsches stochastisches Feld mit Kovarianz

$$\text{Cov}[W(t, x), W(s, y)] = \min(s, t)q(x, y)$$

für $s, t \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathcal{D}$ und eine symmetrische, strikt positiv definite Funktion $q \in C(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. Für die genaue Herleitung sei auf Barth/Benth/Potthoff [BBP08] verwiesen sowie beispielsweise auf Abrahamsen [Abr97] für die Theorie der stochastischen Felder.

Es ergibt sich folgende explizite Darstellung von $T(t, x)$, gegeben $T(t_0, x)$, für $t \geq t_0$:

$$T(t, x) = s(t, x) + e^{-\kappa(x)(t-t_0)}(T(t_0, x) - s(t_0, x)) + \int_{t_0}^t \sigma(u, x) e^{-\kappa(x)(t-u)} dW(u, x). \quad (3.69)$$

Zur Simulation wird die Temperatur aus Gleichung (3.69) in der Zeitvariable für $t_i \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ folgendermaßen diskretisiert:

$$\begin{aligned} T(t_{i+1}, x) = & s(t_{i+1}, x) + e^{-\kappa(x)(t_{i+1}-t_i)}(s(t_i, x) - T(t_i, x)) \\ & + \sigma(t_i, x) e^{-\kappa(x)(t_{i+1}-t_i)}(W(t_{i+1}, x) - W(t_i, x)). \end{aligned}$$

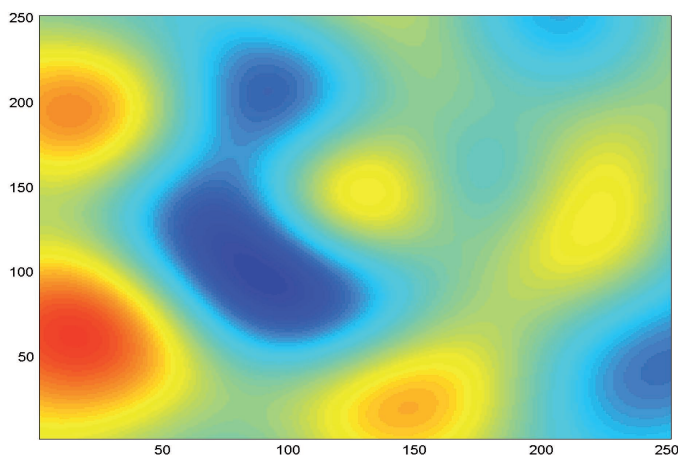


Abbildung 3.8: Simulation der Durchschnittstemperatur an einem Tag Mitte Juni in Litauen (ungefähr zwischen 15 °C und 18 °C) mit 25 Datenpunkten, [BBP08]

Schätzung der Parameter

Die Autoren verwenden die Temperaturdaten vom 01.06.1964 bis zum 31.08.2004 für 4 litauische Städte, Dūkštas, Lazdijai, Palanga und Trakų Vokė, die repräsentativ für die 4 unterschiedlichen Klimazonen Litauens ausgewählt wurden.

Zur Vereinfachung wird \mathcal{D} als rechteckig angenommen. q sei gegeben durch:

$$q(x, y) = 1 - \frac{3|x - y|}{2\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{|x - y|}{\beta} \right)^3$$

für $|x - y|\beta^{-1} < 1$ und sonst 0, $x, y \in \mathcal{D}$ mit $\beta = 1,1348 \cdot 10^6$. Genaueres zur Wahl von q ist bei Benth/Šaltytė-Benth/Jalinskas [BŠBJ07] zu finden. q ist wie verlangt positiv definit.

Des Weiteren ergeben sich folgende Parameterschätzungen:

Saisonalität $s(t)$			Standardabweichung $\sigma(t)$										Mean-Reversion
c_0	c_1	c_2	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	κ	
6,1	11	45,5	5,7	3,0	1,0	1,4	0,02	0,9	1,0	0,05	0,55	0,18	

Abbildung 3.8 zeigt eine Simulation der Temperatur an einem Tag Mitte Juni in Litauen.

3.3.3 Bewertung von „synthetischen“ Temperaturderivaten

Wir betrachten die Indizes CAT, HDD und CDD. Man beachte, dass diese in unserem Fall ortsabhängig sind, deshalb schreiben wir (im Gegensatz zu Abschnitt 3.1):

$$\begin{aligned} \text{CAT}(\tau_1, \tau_2, x) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} T(t, x) dt, \\ \text{HDD}(\tau_1, \tau_2, x) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(\rho - T(t, x), 0) dt, \\ \text{CDD}(\tau_1, \tau_2, x) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(T(t, x) - \rho, 0) dt. \end{aligned}$$

x ist die Koordinate der betrachteten Stadt (bezüglich eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems). Wie bereits erwähnt werden an der CME HDD- und CDD-Futures für 24 US-amerikanische, sechs kanadische und drei australische Städte gehandelt, sowie CAT-, HDD-

und/oder CDD-Futures für zehn europäische und zwei japanische Städte. Dann sei \mathcal{D} ein geographisches Gebiet, z. B. die USA oder ein Teil von Europa. Wir nehmen an, dass CAT-, HDD- und CDD-Futures für n Städte mit den Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n in \mathcal{D} angeboten werden.

Analyse eines allgemeinen Temperaturindex

Wir betrachten einen Agenten, der einem Temperaturreisiko in einem Gebiet $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, \mathcal{A} Borelsch, ausgesetzt ist und dieses Risiko mit Futures auf einen bestimmten, am Markt gehandelten Temperaturindex absichern möchte. Bezeichne $I(\tau_1, \tau_2, \cdot)$ einen HDD-, CDD- oder CAT-Index. Wir nehmen an, dass der Agent einem Temperaturreisiko der Form

$$\int_{\mathcal{A}} I(\tau_1, \tau_2, y) \mu(dy) \quad (3.70)$$

ausgesetzt ist. Hierbei ist μ ein Maß auf $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{A}))$ mit $\mu(\mathcal{A}) < \infty$. Wir nehmen an, dass $I(\tau_1, \tau_2, \cdot)$ integrierbar bezüglich μ auf \mathcal{A} ist.

Betrachten wir jetzt das folgende Minimale-Varianz-Absicherungsproblem. Der Agent möchte den L^2 -Abstand zwischen dem gewünschten Payoff des Futures – definiert in (3.70) – und den am Markt verfügbaren Futures, wenn der Agent den Futures-Markt zur Zeit $t \leq \tau_1$ betritt, minimieren. Er kann die verfügbaren Temperatur-Futures für die Orte x_1, \dots, x_n kombinieren, um ein Portfolio von Temperatur-Futures zu erhalten. Wir nehmen an, dass der Index am Ort i die Messperiode $[\tau_1^i, \tau_2^i]$, $\tau_1^i \leq \tau_2^i$, mit $\tau_1 \leq \tau_1^i$ für alle $i = 1, \dots, n$ hat.

Der Investor ist sowohl örtlichem als auch zeitlichem Risiko ausgesetzt: Eventuell gibt es keinen Index mit Messperiode $[\tau_1, \tau_2]$, wie der Investor es wünscht, oder es gibt keine Temperatur-Futures für die Orte $y \in \mathcal{A}$. Der Investor muss sich also ein optimales Portfolio der verfügbaren Temperatur-Futures kreieren, das die gewünschten, nicht angebotenen Futures optimal abdeckt. Dieses konstruierte Futures-Portfolio muss die örtlichen und zeitlichen Risiken minimieren. Außerdem kann es sein, dass der Investor CDD-Futures möchte, aber nur CAT-Futures erhältlich sind. Auch das werden wir berücksichtigen.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ die Zahl der Verträge, die auf jeden Temperatur-Future zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$ abgeschlossen sind. Die vom Investor getroffene Investitionsentscheidung $\mathbf{a}(t)$ hängt von der bis zu dieser Zeit verfügbaren Marktinformation ab. Deshalb nehmen wir an, dass $t \mapsto \mathbf{a}(t)$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adaptierter stochastischer Prozess ist. Das verbleibende Risiko, gemessen bezüglich der Varianz des nicht zu versichernden Teils von (3.70), ist für eine gegebene Strategie $\mathbf{a}(t)$ definiert durch:

$$R(t, \mathbf{a}(t)) = \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathcal{A}} I(\tau_1, \tau_2, y) d\mu(y) - \sum_{i=1}^n a_i(t) I(\tau_1^i, \tau_2^i, x_i) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.71)$$

Das Ziel des Agenten ist es, eine optimale Hedging-Strategie $\hat{\mathbf{a}}(t)$ zu finden, die $R(t, \mathbf{a}(t))$ in (3.71) minimiert. Wir lösen also das Minimierungsproblem

$$\hat{R}(t) = \min_{\mathbf{a}(t)} R(t, \mathbf{a}(t)). \quad (3.72)$$

Die sich daraus ergebende optimale Wahl von $\mathbf{a}(t)$, bezeichnet als $\hat{\mathbf{a}}(t)$, ist ein **synthetischer Futures-Vertrag**. Der synthetische Futures-Vertrag ist dadurch optimal, dass er die Varianz des Abstandes zwischen den gewünschten Futures und dem Marktangebot minimiert. Der synthetische Futures-Vertrag ist definiert als die Menge $\sum_{i=1}^n a_i(t) I(\tau_1, \tau_2, x_i)$ von gehandelten Temperatur-Futures zur Zeit t .

Das zu minimierende Funktional $R(t, \mathbf{a}(t))$ kann umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} R(t, \mathbf{a}(t)) &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathcal{A}} I(\tau_1, \tau_2, y) \mu(dy) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n a_i(t) \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{A}} I(\tau_1, \tau_2, y) \mu(dy) I(\tau_1^i, \tau_2^i, x_i) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + 2 \sum_{i=1, j=1, i < j}^n a_i(t) a_j(t) \mathbb{E} \left[I(\tau_1^i, \tau_2^i, x_i) I(\tau_1^j, \tau_2^j, x_j) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n a_i^2(t) \mathbb{E} \left[I(\tau_1^i, \tau_2^i, x_i)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Definiere

$$w(t, x, y) := \mathbb{E} \left[I(\tau_1^x, \tau_2^x, x) I(\tau_1^y, \tau_2^y, y) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

für $x, y \in \mathcal{D}$ und $\tau_1^x, \tau_2^x, \tau_1^y, \tau_2^y \in \mathbb{R}_+$. Man beachte, dass die Messperioden für die Orte x und y relevant sind. Ist z. B. $y \in \mathcal{A}$, dann ist $[\tau_1^y, \tau_2^y] = [\tau_1, \tau_2]$. Wenn allerdings $x = x_i$, dann ist $[\tau_1^{x_i}, \tau_2^{x_i}] = [\tau_1^i, \tau_2^i]$. Definiere $\mathbf{b}(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t))'$ mit

$$b_i(t) := \frac{\int_{\mathcal{A}} w(t, x_i, y) \mu(dy)}{w(t, x_i, x_i)}$$

und die Matrix $A(t)$ als

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & 1 & \cdots & A_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit $A_{ij}(t) = \frac{w(t, x_i, x_j)}{w(t, x_i, x_i)}$.

Im nächsten Lemma geben wir die Minimalstellen von $R(t, \mathbf{a}(t))$ an:

Lemma 3.3.1. *Die Minimalstellen $\hat{\mathbf{a}}(t) := (\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_n(t))'$ von $R(t, \mathbf{a}(t))$ in (3.71) sind gegeben als die Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$A(t) \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}(t).$$

Die bedingten Erwartungen bezüglich \mathcal{F}_t in den Einträgen der Matrix $A(t)$ und des Vektors $\mathbf{b}(t)$ können mithilfe von Gleichung (3.69) berechnet werden. Daraus folgt, dass die Lösung $\hat{\mathbf{a}}(t)$ eine Funktion der Temperatur zur Zeit t an den Orten x_1, \dots, x_n , für die Futures angeboten werden, sowie des Temperaturfeldes im Gebiet \mathcal{A} ist. In der Praxis sind an den Orten, wo Futures gehandelt werden, zuverlässige Temperaturbeobachtungen vorhanden.

Für andere Orte ist das nicht immer der Fall. Für ein Gebiet \mathcal{A} , in dem man die Temperatur nur an ein paar Orten kennt, muss man extrapolieren, um ein Feld zu erhalten. Alternativ kann man die Temperatur in dem Gebiet simulieren, basierend auf den bekannten Temperaturen in den Messorten.

Die optimalen Werte $\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_n(t)$ definieren den synthetischen Future-Preis als

$$F_{\mathcal{A}}^I(t; \tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(t) F_i^I(t; \tau_1^i, \tau_2^i).$$

Hierbei ist $F_i^I(t; \tau_1, \tau_2)$ der Future-Preis zur Zeit t für den gehandelten Vertrag, geschrieben auf den Index $I(\tau_1^i, \tau_2^i, x_i)$.

Wenn μ ein Punktmaß ist, konzentriert auf x_j für ein $j = 1, \dots, n$ mit $\tau_1 = \tau_1^j, \tau_2 = \tau_2^j$, dann ist der optimale synthetische Futures-Vertrag einfach gleich dem an diesem Ort gehandelten Vertrag, d. h. $\hat{a}_j(t) = 1$ und $\hat{a}_i(t) = 0$ für $i = 1, \dots, n, i \neq j$. Für $\tau_1 \neq \tau_1^j$ und/oder $\tau_2 \neq \tau_2^j$ gilt das nicht und der Investor hat immer noch ein gewisses Risiko, allerdings nur ein zeitliches. Dieses zeitliche Risiko kann verringert werden, indem man Futures an anderen Orten verwendet, also das Portfolio räumlich verteilt.

Das Funktional $\hat{R}(t) = R(t, \hat{\mathbf{a}}(t))$, das nach Gleichung (3.72) minimiert wurde, misst dann das verbleibende Risiko, das mit den auf dem Markt angebotenen Futures nicht abgesichert werden kann.

Absicherung mit CAT-Futures

Wir betrachten die Situation, dass alle in Frage kommenden Indizes CAT-Futures sind, d. h. $I = \text{CAT}$. Mit der expliziten Darstellung von $T(t, x)$ in (3.69) erhält man für $\text{CAT}(\tau_1, \tau_2, x)$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{CAT}(\tau_1^x, \tau_2^x, x) &= \int_{\tau_1^x}^{\tau_2^x} T(\tau, x) d\tau \\ &= \int_{\tau_1^x}^{\tau_2^x} s(\tau, x) d\tau + (T(t, x) - s(t, x)) \cdot \tilde{\kappa}(t; \tau_1^x, \tau_2^x, x) \\ &\quad + \int_t^{\tau_2^x} \sigma(u, x) \cdot \tilde{\kappa}(u, \tau_1^x, \tau_2^x, x) dW(u, x) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\kappa}(u; \tau_1^x, \tau_2^x, x) := \frac{1}{\kappa(x)} \left(e^{-\kappa(x)(\tau_1^x - \min(u, \tau_1^x))} - e^{-\kappa(x)(\tau_2^x - u)} \right).$$

$\text{CAT}(\tau_1^x, \tau_2^x, x)$, bedingt auf \mathcal{F}_t , ist ein Gaußsches stochastisches Feld mit Mittelwert $m(t, x)$ und Kovarianz $c(t, x, y)$:

$$\begin{aligned} m(t, x) &:= \mathbb{E} [\text{CAT}(\tau_1^x, \tau_2^x, x) | \mathcal{F}_t] \\ &= \int_{\tau_1^x}^{\tau_2^x} s(\tau, x) d\tau + (T(t, x) - s(t, x)) \tilde{\kappa}(t; \tau_1^x, \tau_2^x, x), \\ c(t, x, y) &:= \text{Cov} [\text{CAT}(\tau_1^x, \tau_2^x, x), \text{CAT}(\tau_1^y, \tau_2^y, y) | \mathcal{F}_t] \\ &= q(x, y) \int_t^{\min(\tau_2^x, \tau_2^y)} \sigma(u, x) \sigma(u, y) \tilde{\kappa}(u, \tau_1^x, \tau_2^x, x) \tilde{\kappa}(u, \tau_1^y, \tau_2^y, y) du. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.3.1 werden die nicht-diagonalen Elemente der Matrix $A(t)$ bestimmt durch:

$$A_{ij}(t) = \frac{c(t, x_i, x_j) + m(t, x_i)m(t, x_j)}{c(t, x_i, x_i) + m^2(t, x_i)}$$

für $i, j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$. Außerdem sind die Koordinaten des Vektors $\mathbf{b}(t)$ gegeben durch:

$$b_i(t) = \frac{\int_{\mathcal{A}} c(t, y, x_i) \mu(dy) + \int_{\mathcal{A}} m(t, y) \mu(dy) m(t, x_i)}{c(t, x_i, x_i) + m^2(t, x_i)}$$

für $i = 1, \dots, n$.

Lösen des linearen Gleichungssystems $A(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{b}(t)$ mit diesen Ausdrücken für $A(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ liefert die optimalen Gewichte zur Konstruktion von synthetischen Futures basierend auf CAT-Verträgen an verschiedenen Orten.

Absicherung mit HDD-/CDD-Futures

Wir betrachten jetzt den Fall, dass ausschließlich CDD-Futures angeboten werden. μ sei ein Punktmaß am Ort $y \in \mathcal{D}$ ist. Diese Bedingung wird nur benötigt, um im Folgenden komplizierte Notationen zu vermeiden. Der Fall der HDD-Futures ist analog.

Um die Einträge der Matrix A und des Vektors \mathbf{b} in Lemma 3.3.1 zu bestimmen, muss man die bedingte Erwartung vom Typ

$$\begin{aligned} w(t; x, y) &:= \mathbb{E} \left[\int_{\tau_1^x}^{\tau_2^x} \max(T(\tau, x) - \rho, 0) d\tau \int_{\tau_1^y}^{\tau_2^y} \max(T(\tau, y) - \rho, 0) d\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1^x}^{\tau_2^x} \int_{\tau_1^y}^{\tau_2^y} \mathbb{E} [\max(T(\tau, x) - \rho, 0) \max(T(\tau', y) - \rho, 0) | \mathcal{F}_t] d\tau d\tau' \end{aligned}$$

an den Orten $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, hier Kombinationen aus x_1, \dots, x_n und y , berechnen. Mit der expliziten Darstellung von $T(t, x)$, gegeben $T(t_0, x)$, in (3.69) erhält man:

$$\begin{aligned} w(t; x, y) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - r(\tau, \tau', x_i, x_j))^{\frac{3}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\text{Var} [T(\tau, x_i) | \mathcal{F}_t] \text{Var} [T(\tau', x_j) | \mathcal{F}_t]} g(\tau, \tau', x_i, x_j) d\tau d\tau', \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(\tau; \tau', x_i, x_j) &:= \int_{\hat{x}_j}^{\infty} (u - \rho) \exp \left(-\frac{1}{2} (1 - r(\tau, \tau', x_i, x_j)^2) u^2 \right) \\ &\quad \int_{\hat{x}_i}^{\infty} (v - \rho) \exp \left(-\frac{1}{2} (v - r(\tau, \tau', x_i, x_j)^2) u^2 \right) dv du \end{aligned}$$

mit den unteren Integralgrenzen

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &:= \frac{\rho - \mathbb{E} [T(\tau, x_i) | \mathcal{F}_t]}{\sqrt{(1 - r(\tau, \tau', x_i, x_j)^2) \text{Var} [T(\tau, x_i) | \mathcal{F}_t]}}, \\ \hat{x}_j &:= \frac{\rho - \mathbb{E} [T(\tau', x_j) | \mathcal{F}_t]}{\sqrt{(1 - r(\tau, \tau', x_i, x_j)^2) \text{Var} [T(\tau', x_j) | \mathcal{F}_t]}} \end{aligned}$$

und

$$r(\tau, \tau', x_i, x_j) := \frac{\text{Cov} [T(\tau, x_i), T(\tau', x_j) | \mathcal{F}_t]}{\sqrt{\text{Var} [T(\tau, x_i) | \mathcal{F}_t] \text{Var} [T(\tau', x_j) | \mathcal{F}_t]}}.$$

Erwartung und Kovarianz von $T(t, x)$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [T(t, x) | \mathcal{F}_t] &= s(t_0, x) + (T(t_0, x) - s(t_0, x)) e^{-\kappa(x)(t-t_0)}, \\ \text{Cov} [T(\tau, x), T(\tau', y) | \mathcal{F}_t] &= q(x, y) \int_t^{\min(\tau, \tau')} \sigma(u, x) \sigma(u, y) e^{-\kappa(x)(\tau-u)} e^{-\kappa(y)(\tau'-u)} du. \end{aligned}$$

Damit sind die Einträge der Matrix $A(t)$ und des Vektors $\mathbf{b}(t)$ bezüglich der Parameterfunktion von $T(t, x)$ bestimmt.

Normalerweise befindet man sich in der Situation, dass der Markt HDD- und CDD-Futures anbietet. Die obigen Berechnungen können leicht abgeändert werden, um solche Mischungen zu berechnen.

Zusammenfassung und Ausblick

Seit einigen Jahren besteht für Unternehmen die Möglichkeit, sich mit Wetterderivaten gegen wetterbedingte Umsatzeinbußen abzusichern. Dabei handelt es sich im Gegensatz zu Versicherungen nicht um die Absicherung sehr selten auftretender Katastrophen, sondern von wahrscheinlichen Wetterlagen, die für Umsatzeinbrüche sorgen. Da Wetterderivate ein recht neues und noch nicht so bekanntes Finanzinstrument sind, wurden zu Beginn dieser Arbeit ausführlich der Aufbau, die Geschichte, die Marktsituation, die Interessentenlage sowie die zugrundeliegenden Wetterindizes dargestellt.

Ein funktionierender Markt für Wetterderivate hat sich noch nicht entwickelt, was es schwierig macht, die Preise von Wetterderivaten zu bestimmen. In der Praxis wird zur Berechnung häufig die Burn-Analyse verwendet, bei der der Preis der durchschnittlichen Auszahlung des Derivats in vorherigen Jahren entspricht. Da diese Methode große Nachteile hat, stellt sich die Frage nach einer besseren Möglichkeit der Preisberechnung.

Eine weit verbreitete Möglichkeit ist es, den zugrundeliegenden Wetterprozess stochastisch zu modellieren. In dieser Arbeit wurden verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung von Wetterprozessen – überwiegend der Temperatur, aber auch der Windgeschwindigkeit und des Niederschlags – vorgestellt. Sie setzen sich meist aus einigen deterministischen Komponenten sowie einer stochastischen Komponente zusammen.

Die vorgestellten Modelle wurden in zeitdiskrete und zeitstetige Modelle unterteilt. Für ein zeitdiskretes Modell spricht, dass die Daten diskret gemessen werden und die tägliche Durchschnittstemperatur ebenfalls eine diskrete Größe ist. Der Vorteil der stetigen Modelle ist, dass sie leichter bei der Bewertung einzusetzen sind.

Die Untersuchung der Berliner Temperaturdaten hat andere empirische Untersuchungen bestätigt, dass ein Temperaturmodell vier wichtige Eigenschaften der Temperatur widerspiegeln sollte. Der Trend der globalen Entwicklung sollte erfasst sein, außerdem die saisonalen Schwankungen der Temperatur. Der Trend wird in der Regel linear modelliert, die saisonale Schwankung durch eine Sinuskurve oder eine Fourier-Reihe niedriger Ordnung. Eine nicht so naheliegende Eigenschaft ist die Saisonalität der Standardabweichung, die sich anhand von empirischen Untersuchungen ergibt. Sie wird in den Modellen ebenfalls durch Fourier-Reihen erfasst. Die vierte Eigenschaft ist das autoregressive Verhalten der Temperatur. Die Temperatur eines Tages ist abhängig von den Temperaturen der vorherigen Tage. Dieser Eigenschaft wird durch die Verwendung von AR-Prozessen oder der fraktionalen Brownschen Bewegung mit langreichweitiger Abhängigkeit entsprochen. Die meisten der vorgestellten Modelle erfüllen diese vier Eigenschaften.

Ein systematischer Vergleich der Methoden fällt schwer, da die Autoren sich auf unterschiedliche Wetterdaten beziehen und ihr Modell optimal an diese angepasst haben. Um die verschiedenen Modelle vergleichen zu können, müsste man alle Methoden auf einen unabhängigen Datensatz anwenden und jeweils die Fehlerfunktion berechnen. Allerdings ist nicht davon auszugehen, dass Datensätze anderer Städte die gleichen Ergebnisse liefern würden.

Als ein guter Ansatz erweist sich das CAR(p)-Modell. Es erfasst die Autoregressivität der Temperatur und berücksichtigt im Gegensatz zum Ornstein-Uhlenbeck-Modell nicht nur die Abhängigkeit der Temperatur von der des Vortages, sondern von der Temperatur beliebig vieler vorheriger Tage. In der Praxis erweist sich $p = 3$ als ausreichend. Außerdem erhält man für die Bewertung und Absicherung auf Basis des CAR-Modells gute Ergebnisse.

Da es sich beim Markt für Wetterderivate um einen unvollständigen Finanzmarkt handelt, wurde bei der Bewertung auf Basis von Wettermodellen der Parameter „Marktpreis des Risikos“ eingeführt. Mit ihm kann man die errechneten Preise an die Marktpreise anpassen. Wenn sich ein funktionierender Markt entwickelt hat, kann man auch den Marktpreis des Risikos weiter untersuchen. Es wird interessant sein, wie dieser zu modellieren ist, z. B. deterministisch oder stochastisch. Dabei ist aber nicht davon auszugehen, dass sich für alle Verträge der gleiche Parameter ergibt, genauso wird er sich wohl von Stadt zu Stadt oder Land zu Land unterscheiden. Bewertung und Absicherung wurden auf Basis des Ornstein-Uhlenbeck-Modells, des Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modells, des CAR(p)-Modells und des fraktionalen Ornstein-Uhlenbeck-Modells durchgeführt. Dabei ließen sich die CAT-Future-Preise und ihre Dynamiken auf Basis der ersten drei Modelle zu einer Formel zusammenfassen.

Eine alternative Bewertungsmöglichkeit bietet die nutzenorientierte Bewertung. Dabei wird der Preis in Abhängigkeit des Nutzens für den Käufer bestimmt. Es wird davon ausgegangen, dass ein Interessent Wetterderivate kauft oder verkauft, wenn dadurch sein Nutzen gesteigert wird. Dabei wird der Preis mittels Indifferenzpreis, Bewertung nach dem Grenznutzen oder dem Gleichgewichtsmodell berechnet.

Außerdem wurde noch die Situation behandelt, dass für die Stadt, in der man Wetterrisiken absichern möchte, keine Wetterderivate angeboten werden und man auf Derivate anderer Städte zurückgreifen muss. Nach drei Kriterien, welche der Städte man auswählen sollte, – Korrelationskoeffizient, Sensitivität und Spezifität – wurde ein Temperaturmodell vorgestellt, das auch vom Ort abhängt und die Temperatur eines ganzen Landes beschreibt. Anhand dieses Modells wurden Gewichtungen berechnet, welche verfügbaren Derivate man optimalerweise wählen sollte. Hier wäre es interessant, dieses Modell auf ein größeres Gebiet anzuwenden, beispielsweise die USA oder Europa, mit den an der CME angebotenen Wetterderivaten.

In Zukunft ist von einer wachsenden Nachfrage nach Wetterderivaten auszugehen. Wenn die Möglichkeit, sich gegen Wetterrisiken absichern zu können, bekannter geworden ist, werden Unternehmen ihre Umsatzeinbußen nicht mehr mit dem Wetter begründen können. Eine allgemein anerkannte Bewertungsformel für Wetterderivate dürfte – ähnlich wie bei der Einführung der Black-Scholes-Formel auf dem Optionsmarkt 1973 – zu einer verbesserten Marktsituation führen. Auch die Möglichkeit, Wetterderivate direkt online abschließen zu können, und das Engagement der Weltbank tragen zu einem Wachsen des Marktes bei.

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Wenn nicht anders angegeben, haben die verwendeten Symbole und Abkürzungen folgende Bedeutungen:

C_Y	Preis einer Call-Option auf ein Y -Future
CAR	Continuous Autoregressive (siehe Def. 1.2.24)
CAT	Cumulative Average Temperature (siehe Def. 1.1.6)
CDD_t	Cooling-Degree-Day eines Tages t (siehe Def. 1.1.4)
$CDD(\tau_1, \tau_2)$	Cooling-Degree-Days über einen Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$ (siehe Def. 1.1.5)
CME	Chicago Mercantile Exchange (Chicagoer Börse)
DAT	Daily Average Temperature (tägl. Durchschnittstemperatur, siehe Def. 1.1.1)
DWD	Deutscher Wetterdienst
$\mathbb{E}[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\theta}[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X unter dem Maß \mathbb{Q}^θ
F_Y	Preis eines Futures auf einen Wetterindex Y
H	Hurst-Parameter der fraktionalen Brownschen Bewegung
HDD_t	Heating-Degree-Day eines Tages t (siehe Def. 1.1.2)
$HDD(\tau_1, \tau_2)$	Heating-Degree-Days über einen Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$ (siehe Def. 1.1.3)
i.i.d.	independent and identically distributed (unabhängig und identisch verteilt)
K	Strike (Ausübungspreis)
κ	Parameter der Mean-Reversion
$N(\tau_1, \tau_2)$	Nordix-Wind-Speed-Index über einen Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$ (siehe Def. 1.1.11)
OTC	Over The Counter („über den Ladentisch“, außerbörslich)
P_Y	Preis einer Put-Option auf ein Y -Future
$PRIM(\tau_1, \tau_2)$	Pacific-Rim-Index über einen Zeitraum $[\tau_1, \tau_2]$ (siehe Def. 1.1.7)
\mathbb{Q}^θ	durch den Parameter θ bestimmtes Martingalmaß
s_t	saisonale Komponente
σ_t	Standardabweichung
ρ	Referenzwert der Cooling- und Heating-Degree-Days, meist 18°C
T	Maturität
T_t	tägliche Durchschnittstemperatur zur Zeit t (siehe Def. 1.1.1)
τ_1	Beginn der Messperiode eines Wetterindex
τ_2	Ende der Messperiode eines Wetterindex
θ_t	Marktpreis des Risikos
R_t	Temperaturresiduum nach Abzug von Trend und Saisonalität
V_t	Windgeschwindigkeit zur Zeit t
$\text{Var}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen X
$\text{Var}_{\mathbb{Q}^\theta}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen X unter dem Maß \mathbb{Q}^θ
$W = (W_t)_{t \geq 0}$	Brownsche Bewegung (siehe Def. 1.2.8)
$W^H = (W_t^H)_{t \geq 0}$	fraktionale Brownsche Bewegung (siehe Def. 1.2.18)
WRMA	Weather Risk Management Association
X	Contingent Claim
Y	Wetterindex

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiel eines Niederschlagsderivats auf Regentage (Laufzeit 16 Tage, Auszahlung pro Regentag 25.000 €, Strike 4 Regentage, Obergrenze 250.000 € (10 Regentage über dem Strike), Prämie 24.000 €)	6
1.2	Zahl der Vertragsabschlüsse (links) und Nominalvolumina der Verträge (rechts) 1998-2008, Daten: [WRMA06, WRMA08b, III08]	8
1.3	Wettereinflüsse (blau) und sonstige Einflüsse auf den Strompreis; die Grafik basiert auf [RWE08].	10
1.4	Minimal- und Maximaltemperaturen 2008 (oben) und die daraus errechnete tägliche Durchschnittstemperatur (DAT, unten) 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof, Daten: DWD	11
1.5	Minimal- und Maximaltemperaturen vom 21.07.2008 bis zum 27.07.2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof, die daraus berechnete DAT, die täglichen HDDs und CDDs sowie die Durchschnittstemperatur des DWD, Daten: DWD	11
1.6	Oben: DAT und Durchschnittstemperaturen des DWD 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof. Unten: Differenz aus DAT und DWD, Daten: DWD	13
1.7	HDDs und CDDs 2008 an der Wetterstation Berlin-Tempelhof	13
1.8	Zusammenhang zwischen täglicher Durchschnittstemperatur und täglicher durchschnittlicher Stromlast 1997-2005 in New South Wales (Australien), Quelle: [SS07]	13
1.9	Zahl der monatlichen HDDs, CDDs und der monatlichen CAT von 2002 bis 2008 in Berlin-Tempelhof	15
1.10	Tägliche Durchschnittstemperatur 2008 in Tokio und der daraus berechnete monatliche PRIM-Index, Daten: CME	15
1.11	Zahl der monatlichen Frosttage in Amsterdam-Schiphol 2002-2008, Daten: CME	15
1.12	Täglicher Niederschlag 2008 in Berlin-Tempelhof, Daten: DWD	17
1.13	Jährlicher Schneefall von 2002 bis 2008 in Boston und New York (1 Inch = 2,54 cm), Daten: CME	17
1.14	Nordix-Index für drei Gebiete (blau, grün, rot) im Bundesstaat New York, Quelle: US Futures Exchange	17
1.15	Simulation der geometrischen Brownschen Bewegung für $\sigma = 0,4$ und verschiedene Werte von μ	26
1.16	Simulation der fraktionalen Brownschen Bewegung für drei verschiedene Hurst-Exponenten	29
2.1	Oben: Tägliche Durchschnittstemperatur 1991-2008 in Berlin-Tempelhof und die angepasste saisonale Komponente (rot). Unten: Temperaturresiduum nach Entfernen der saisonalen Komponente, Daten: DWD	42
2.2	Empirische tägliche Standardabweichung in Berlin-Tempelhof im Verlauf eines Jahres	43
2.3	Empirische Autokorrelation des Temperaturresiduums in Berlin-Tempelhof mit $k = 0, 1, \dots, 30$ Tagen Verzögerung	43

2.4	Abweichung der täglichen Durchschnittstemperatur des DWD und der täglichen Niederschlagsmenge vom Mittelwert (10,15 °C bzw. 1,59 mm) in Berlin-Tempelhof 1991 bis 2008 in Abhängigkeit des Wochentages	44
2.5	Empirische Standardabweichung der Temperatur von Januar bis Dezember in Atlanta und Chicago, berechnet für den Zeitraum 01.01.1979 bis 31.12.1998, Quelle: [CW04], sowie die modellierten Standardabweichungen für Atlanta, Chicago und New York, alle Angaben in Grad Fahrenheit	48
2.6	Simuliertes Temperaturresiduum in New York als AR(3)-Prozess über 5 Jahre . .	48
2.7	Simulierte Temperatur in Paris-Montsouris über 5 Jahre als ARMA(3,0)-Prozess	48
2.8	Oben: Tägliche Mittagstemperatur in Heathrow, Quelle: [TB04]. Mitte: eine Simulation der Temperatur über 6,5 Jahre auf Basis der geschätzten Parameter für Heathrow im AR-GARCH-Modell von Taylor/Buizza. Unten: die dazugehörige simulierte Varianz	52
2.9	Oben: Tägliche Mittags-Windgeschwindigkeit in Bears Down (Cornwall) vom 01.01.1995 bis zum 30.06.2004, Quelle: [TMB08]. Unten: eine Simulation der Windgeschwindigkeit über 9,5 Jahre auf Basis der geschätzten Parameter für Bears Down im AR-GARCH-Modell von Taylor/McSharry/Buizza.	54
2.10	Oben: Simulation der halbstündigen Temperaturen aus dem Fourier-Transformierte-Modell über 4 Jahre (70128 Werte). Unten: die daraus errechnete tägliche Durchschnittstemperatur	56
2.11	Standardabweichungen für die Ornstein-Uhlenbeck-Modelle mit stückweise (monatlich) konstanter Varianz und Varianz als Fourier-Reihe	59
2.12	Simulation der Temperatur in Stockholm über 5 Jahre als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit stückweise konstanter Varianz mit den in [ADS02] geschätzten Parametern	61
2.13	Tägliche Durchschnittstemperatur (trendbereinigt) in Stockholm sowie die angepasste saisonale Komponente, 01.01.1994-31.12.2004, Quelle: [BŠB07]	61
2.14	Simulation der trendbereinigten Temperatur in Stockholm über 11 Jahre als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Varianz als Fourier-Reihe mit den in [BŠB07] geschätzten Parametern sowie die saisonale Komponente (rot)	61
2.15	Simulation der Temperatur von 1990 bis 1999 als fraktionaler Ornstein-Uhlenbeck-Prozess sowie die tatsächliche Temperatur 1990-1999, Quelle: [BSZ02] . . .	63
2.16	Verteilung der tatsächlichen Temperaturresiduen in Alta (- - -) im Vergleich zur geschätzten Normalverteilung (—, oben) bzw. verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung (—, unten), Quelle: [BŠB05]	65
2.17	Simulation der Temperatur als CAR(3)-Prozess und der Varianz über 5 Jahre . .	67
2.18	Mittlere tägliche Windgeschwindigkeit im Bundesstaat New York in Meilen pro Stunde vom 01.01.2002 bis zum 31.12.2006, Daten: US Futures Exchange	70
2.19	Simulation der täglichen Windgeschwindigkeit im Bundesstaat New York in Meilen pro Stunde über 5 Jahre als CAR(4)-Prozess anhand der in [BŠB09] geschätzten Parameter	70
2.20	Simulation des Niederschlags als Sprung-Markov-Prozess, Quelle: [CD05b]	70
3.1	Die Future-Preise zur Zeit 0 auf den HDD-Index jedes Monats des Folgejahres, basierend auf dem Modell für die Stockholmer Temperaturen mit Varianz als Fourier-Reihe; die gestrichelten Linien geben die Preise an, wenn man die Varianz das ganze Jahr über konstant $\bar{\sigma} = 2,04$ setzt, Quelle: [BŠB07]	77
3.2	Die genauen Daten der beiden HDD-Optionen, Quelle: [ADS02]	82
3.3	Optionswerte als Funktion der Preisvolatilität σ für verschiedene Korrelationswerte ρ , Quelle: [Dav01]	98

3.4	Forward- und Optionspreise für eine HDD-Saison (Oktober bis März) für fünf amerikanische Städte unter verschiedenen Parametern, Quelle: [CW99]	114
3.5	Mittelwert (μ) und Standardabweichung (σ) der DAT, der täglichen HDDs und des täglichen Niederschlags in Millimetern 1991-2008 und Entfernung zu Berlin und Essen für ausgewählte deutsche Städte, Daten: DWD	116
3.6	Empirische Korrelationskoeffizienten für die HDD-Werte (oben) und die Niederschlagsmengen (unten) in acht deutschen Städten (in Klammern die Entfernungen), 01.01.91-31.12.08, Daten: DWD	117
3.7	Mittelwert und Standardabweichung der jährlichen HDDs 1991-2008 und Sensitivität und Spezifität der sieben Städte bezüglich Berlins für verschiedene Strike-Werte ($K_1 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$, $K_2 = \mu + \sigma$), Daten: DWD	118
3.8	Simulation der Durchschnittstemperatur an einem Tag Mitte Juni in Litauen (ungefähr zwischen 15 °C und 18 °C) mit 25 Datenpunkten, [BBP08]	120

Literaturverzeichnis

- [Abr97] Petter Abrahamsen. A review of Gaussian random fields and correlation functions. Technical Report 917, Norsk Regnesentral, 1997.
- [ADS02] Peter Alaton, Boualem Djehiche, and David Stillberger. On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1):1–20, 2002.
- [AIP07] Stefan Ankirchner, Peter Imkeller, and Alexandre Popier. Optimal cross hedging for insurance derivatives, 2007.
- [AIR07] Stefan Ankirchner, Peter Imkeller, and Gonçalo Dos Reis. Pricing and hedging of weather derivatives based on non-tradable underlyings, 2007.
- [AS72] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1972.
- [Aue03] Josef Auer. Wachstumsmarkt Wetterderivate. *Deutsche Bank Research*, 255, 2003.
- [BBP08] Andrea Barth, Fred Espen Benth, and Jürgen Potthoff. Hedging of spatial temperature risk with market-traded futures. *E-Print No 2, Department of Mathematics, University of Oslo*, 2, 2008.
- [BC08] Philippe Briand and Fulvia Confortola. BSDEs with stochastic Lipschitz condition and quadratic PDEs in Hilbert spaces. *Stochastic Processes and their Applications*, 118(5):818 – 838, 2008.
- [Ben03] Fred Espen Benth. Arbitrage-free pricing of weather derivatives based on fractional Brownian motion. *Applied Mathematical Finance*, 10(4):303–324, 2003.
- [Ben04] Fred Espen Benth. *Option Theory with Stochastic Analysis*. Springer-Verlag, 2004.
- [BRV08] Dominique Bäumer, Rayk Rinke, and Bernhard Vogel. Weekly periodicities of aerosol optical thickness over Central Europe – evidence of an anthropogenic direct aerosol effect. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 8:83–90, 2008.
- [BŠB04] Fred Espen Benth and Jūratė Šaltytė-Benth. The normal inverse Gaussian distribution and spot price modelling in energy markets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(2):177–192, 2004.
- [BŠB05] Fred Espen Benth and Jūratė Šaltytė-Benth. Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 12(1):53–85, 2005.
- [BŠB07] Fred Espen Benth and Jūratė Šaltytė-Benth. The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 7(5):553–561, 2007.
- [BŠB09] Fred Espen Benth and Jūratė Šaltytė-Benth. Dynamic pricing of wind futures. *Energy Economics*, 31:16–24, 2009.

- [BŠBJ07] Fred Espen Benth, Jūratė Šaltytė-Benth, and Paulius Jalinskas. A spatial-temporal model for temperature with seasonal variance. *Journal of Applied Statistics*, 34(7):823–841, 2007.
- [BŠBK07] Fred Espen Benth, Jūratė Šaltytė-Benth, and Steen Koekebakker. Putting a price on temperature. *Scandinavian Journal of Statistics*, 34(4):746–767, 2007.
- [BŠBK08] Fred Espen Benth, Jūratė Šaltytė-Benth, and Steen Koekebakker. *Stochastic Modelling of Electricity and related Markets*. World Scientific, 2008.
- [BSZ02] Dorje C. Brody, Joanna Syroka, and Mihail Zervos. Dynamical pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, 2:189–198, 2002.
- [BV07] Dominique Bäumer and Bernhard Vogel. An unexpected pattern of distinct weekly periodicities in climatological variables in Germany. *Geophysical Research Letters*, 34, 2007.
- [CD05a] Sean D. Campbell and Francis X. Diebold. Weather forecasting for weather derivatives. *Journal of the American Statistical Association*, 100(469):6–16, 2005.
- [CD05b] Rene Carmona and Pavel Diko. Pricing precipitation based derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(7):959–988, 2005.
- [CME05] Chicago Mercantile Exchange. An introduction to CME weather products, 2005.
- [CW99] Melanie Cao and Jason Wei. Pricing weather derivatives: an equilibrium approach. *Department of Economics, Queen’s University, Kingston, Ontario, Working Paper*, 1999.
- [CW00] Melanie Cao and Jason Wei. Equilibrium valuation of weather derivatives. *Department of Economics, Queen’s University, Kingston, Ontario, Working Paper*, 2000. Working Paper.
- [CW04] Melanie Cao and Jason Wei. Weather derivatives valuation and market price of weather risk. *Journal of Futures Market*, 24(11):1065–1089, 2004.
- [Dav97] Mark Davis. Option pricing in incomplete markets. In Michael A. H. Dempster and Stanley R. Pliska, editors, *Mathematics of Derivative Securities*, chapter 13, pages 216–226. Cambridge University Press, 1997.
- [Dav01] Mark Davis. Pricing weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, 1:305–308, 2001.
- [Dec06] Thomas Deck. *Der Itô-Kalkül*. Springer, 2006.
- [DHPD00] Tyrone E. Duncan, Yaozhong Hu, and Bozenna Pasik-Duncan. Stochastic calculus for fractional brownian motion. *SIAM J. Control optim*, 38:582–612, 2000.
- [Dis99a] Robert Dischel. The D1 stochastic temperature model for valuing weather futures and options. *Applied Derivatives Trading*, 1999.
- [Dis99b] Robert Dischel. The Dischel D1 stochastic temperature model. *Applied Derivatives Trading*, 1999.
- [EJ97] Ernst Eberlein and Jean Jacod. On the range of options prices. *Finance and Stochastics*, 1(2):131–140, 1997.

- [EKPQ97] Nicole El Karoui, Shige Peng, and Marie Claire Quenez. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical Finance*, 7(1):1–71, 1997.
- [EM07] Yoshiyuki Emoto and Tetsuya Misawa. Marginal value approach to pricing temperature options and its empirical example on daily temperatures in Nagoya. *To appear in Oikonomika*, 44(2), 2007.
- [Ess01] Hans Esser. Keine Chance dem Wetter - Mit Wetterderivaten lassen sich wetterbedingte Absatzrisiken ausschalten. *ZFK - Zeitung für Kommunale Wirtschaft*, 2001.
- [EWD08] Elektrizitäts-Werk Dahlenburg. 100 Jahre Elektrizitäts-Werk Dahlenburg 1908-2008, 2008.
- [Fra08] Harrie-Jan Hendricks Franssen. Comment on “An unexpected pattern of distinct weekly periodicities in climatological variables in Germany“ by Dominique Bäumer and Bernhard Vogel. *Geophysical Research Letters*, 35, 2008.
- [FS93] Wendell H. Fleming and H. Mete Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, 1993.
- [FS04] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 2004.
- [GJ03] Michael Günther and Ansgar Jüngel. *Finanzderivate mit MATLAB®*. Vieweg + Teubner, 2003.
- [HH06] Christian Hee and Lutz Hofmann. *Wetterderivate - Grundlagen, Exposure, Anwendung und Bewertung*. Gabler Verlag, 2006.
- [HIM05] Ying Hu, Peter Imkeller, and Matthias Müller. Utility maximization in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 15(3):1691–1712, 2005.
- [HM08] Norbert Hirschauer and Oliver Mußhoff. Gegen schlechtes Wetter absichern. *Neue Landwirtschaft*, 7:26–28, 2008.
- [HØ99] Yaozhong Hu and Bernt Øksendal. Fractional white noise calculus and applications to finance. *Preprint No. 10, University of Oslo*, 1999.
- [III08] Insurance Information Institute. *The financial services fact book 2008*, 2008.
- [Irl03] Albrecht Irl. *Finanzmathematik*. Vieweg + Teubner, 2003.
- [JBZ05] Stephen Jewson, Anders Brix, and Christine Ziehmann. *Weather Derivative Valuation - The Meteorological, Statistical, Financial and Mathematical Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [Kle06] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2006.
- [Kob00] Magdalena Kobylanski. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *The Annals of Probability*, 28(2):558–602, 2000.
- [KS01] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*. Springer, 2001.
- [Mey03] Nicolas Meyer. Risikomanagement von Wetterrisiken - Grundlagen, Anwendung und aktuelle Entwicklung. Technical report, Deloitte & Touche, 2003.

- [MH08] Oliver Mußhoff and Norbert Hirschauer. Sind “ineffektive“ Wetterderivate effiziente Risikomanagementinstrumente? In R.A.E. Müller, H.H. Sundermeier, L. Theuvsen, S. Schütze, and M. Morgenstern, editors, *Unternehmens-IT: Führungsinstrument oder Verwaltungsbürde? GI-Edition Lecture Notes in Informatics (LNI) - Proceedings*, volume P-125, pages 105–108. Köllen Druck+Verlag GmbH Bonn, 2008.
- [MM87] Terry A. Marsh and Robert C. Merton. Dividend behavior for the aggregate stock market. *Journal of Business*, 60:1–40, 1987.
- [MZ04] Marek Musiela and Thaleia Zariphopoulou. A valuation algorithm for indifference prices in incomplete markets. *Finance and Stochastics*, 8(3):399–414, 2004.
- [Rai00] Sebastian Raible. *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., 2000.
- [RLBC03] Olivier Roustant, Jean-Paul Laurent, Xavier Bay, and Laurent Carraro. Model risk in the pricing of weather derivatives. *Banque & Marchés*, 2003.
- [Ros07] Gregor Rossmannith. Das Temperaturmodell von Benth und Šaltyté-Benth und dessen Anwendung auf Standorte in Deutschland. Master’s thesis, Ludwigs-Maximilians-Universität München, 2007.
- [RWE08] RWE. Why are weather futures so painfully slow in Europe? In *WRMA Meeting Berlin*. Eric Stein, 2008.
- [Shi99] Albert N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*. World Scientific, 1999.
- [Spi00] Jörg Spicker. Dem Wetter ein Schnippchen schlagen. *FinanzTrainer.com*, 2000.
- [SS07] Jiri Svec and Maxwell Stevenson. Modelling and forecasting temperature based weather derivatives. *Global Finance Journal*, 18(2):185–204, 2007.
- [ST01] Joanna Syroka and Ralf Toumi. Scaling and persistence in observed and modelled surface temperature. *Geophysical Research Letters*, 28:3255–3259, 2001.
- [TB04] James W. Taylor and Roberto Buizza. A comparison of temperature density forecasts from GARCH and atmospheric models. *Journal of Forecasting*, 23:337–355, 2004.
- [TB06] James W. Taylor and Roberto Buizza. Density forecasting for weather derivative pricing. *International Journal of Forecasting*, 22:29–42, 2006.
- [TMB08] James W. Taylor, Patrick E. McSharry, and Roberto Buizza. Wind power density forecasting using wind ensemble predictions and time series models. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, forthcoming, 2008.
- [vA03] Marcel A. P. M. van Asseldonk. Insurance against weather risk: Use of heating degree-days from non-local stations for weather derivatives. *Theoretical and Applied Climatology*, 74:137–144, 2003.
- [WRMA06] Weather Risk Management Association. *Results of the 2006 PwC Survey*, 2006.
- [WRMA08a] Weather Risk Management Association. *Celebrating 10 years of weather risk industry growth*, 2008.
- [WRMA08b] Weather Risk Management Association. *WRMA PwC 2008 Survey results press release*, 2008.

Thesen

- Wetterderivate sind ein neues und noch nicht so bekanntes Finanzinstrument, mit dem sich wettersensible Unternehmen gegen wetterbedingte Umsatzeinbußen absichern können.
- Als Basiswert kann jedes beliebige Wetterereignis gewählt werden, das von einer unabhängigen Messstation aufgezeichnet wird. Diese Arbeit konzentriert sich auf Temperatur, Wind und Niederschlag sowie daraus errechnete Indizes als Basiswerte. Am häufigsten werden Heating-Degree-Days (HDDs), Cooling-Degree-Days (CDDs) und die kumulierte tägliche Durchschnittstemperatur (CAT) verwendet.
- Bewertung anhand von stochastischen Modellen ist der häufig in der Praxis verwendeten Burn-Analyse deutlich überlegen.
- Ein stochastisches Modell der Temperatur sollte die vier Eigenschaften der Temperatur erfassen:
 - Trend der globalen Entwicklung (linear),
 - Saisonalität der Temperatur (Sinuskurve, Fourier-Reihe),
 - Saisonalität der Standardabweichung (Sinuskurve, Fourier-Reihe),
 - Autoregressives Verhalten der Temperatur (AR-Prozess, Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, fraktionale Brownsche Bewegung, CAR-Prozess).
- Als ein besonders gutes stochastisches Modell für die Temperatur erwies sich das CAR-Modell, da es (wie die meisten Modelle) die vier Bedingungen erfüllt, gleichzeitig auch mehrtägige Abhängigkeiten der Temperatur erfasst und gute Ergebnisse bei der Bewertung und Absicherung liefert. Die CAT-Future-Preise und ihre Dynamiken auf Basis dieses Modells konnten mit denen des Ornstein-Uhlenbeck-Modells und des Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Modells zu einer Formel zusammengefasst werden.
- Der Markt für Wetterderivate ist ein unvollständiger Finanzmarkt, da der Basiswert nicht handelbar ist. Somit ergibt sich eine große Zahl von arbitragefreien Preisen. Es wird der Parameter „Marktpreis des Risikos“ eingeführt, mit dem man die errechneten Preise an auf dem Markt angebotene Preise anpassen kann. Wenn sich ein funktionierender Markt entwickelt hat, kann dieser Parameter weiter untersucht werden. Dann stellt sich die Frage, ob er zeitabhängig, ortsabhängig, deterministisch oder stochastisch modelliert wird.
- Bei der nutzenorientierten Bewertung und Absicherung wird davon ausgegangen, dass der Interessent eines Wetterderivats ein Derivat kauft oder verkauft, wenn sich dadurch sein Nutzen erhöht. Möglichkeiten der Bewertung bieten der Indifferenzpreis, die Bewertung nach dem Grenznutzen und das Gleichgewichtsmodell.
- Wenn für den Ort, an dem man ein Wetterrisiko absichern möchte, keine Wetterderivate angeboten werden, kann man sich mit den verfügbaren Derivaten einer oder mehrerer anderer Städte absichern. Kriterien sind dabei die Korrelation der Wetterdaten sowie Spezifität und Sensitivität. Des Weiteren lässt sich ein Temperaturmodell aufstellen, das neben der Zeit auch noch vom Ort abhängig ist. Damit lassen sich die Gewichtungen der verfügbaren Derivate errechnen.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 24. Februar 2009

Matthias Ritter

Einverständniserklärung

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass ein Exemplar meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Instituts für Mathematik verbleibt.

Berlin, den 24. Februar 2009

Matthias Ritter